Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG **3**

2 IONENTEMPERATURBESTIMMUNG AUS LADUNGSAUSTAUSCHSPEKTREN **8**

2.1 Problemstellung **9**

2.2 Modellrechnung für die Spektren **11**

2.3 Temperaturbestimmung mit konventionellen Methoden **16**

2.3.1 Anpassen von Gaußfunktionen 16

2.3.2 Anpassen von simulierten Spektren 18

2.3.3 Ad–hoc Verfahren 19

2.4 Temperaturbestimmung mit neuronalen Netzen **22**

2.4.1 Das Mehrlagige Perzeptron 22

2.4.2 Das Training eines Mehrlagigen Perzeptron 23

2.4.3 Die Anwendung auf Ladungsaustauschspektren 25

2.4.3.1 Vorbereitung der Meßdaten 25

2.4.3.2 Die Wahl der Netzgeometrie und das Training des Netzes 26

2.5 Vergleich der verschiedenen Verfahren **28**

2.5.1 Vergleich des rechnerischen Aufwandes 28

2.5.2 Vergleich der Ergebnisse 29

2.5.3 Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten 31

2.6 Bewertung der Ergebnisse **34**

3 TOMOGRAPHISCHE REKONSTRUKTION AUS BOLOMETRIEDATEN **36**

3.1 Bolometrie an TEXTOR **36**

3.2 Problemstellung **38**

3.3 Mathematische Beschreibung der Messung **39**

3.4 Modell für die Rekonstruktion **42**
3.4.1 Wahl der Modellmenge 43
3.4.1.1 Physikalische Forderungen an die Modellmenge 43
3.4.1.2 Konstruktion der Menge 44
3.4.2 Berechnung der Rekonstruktionsabbildung 50

3.5 Variation der Basisfunktionen **53**
3.5.1 Parallelisierung des Verfahrens 55

3.6 Ergebnisse der Rekonstruktion **58**

3.7 Eine Anwendung: Echtzeitregelung der Strahlungskühlung an TEXTOR **63**
3.7.1 Berechnung der zugeführten Leistung 63
3.7.2 Berechnung der abgestrahlten Leistung 64
3.7.3 Realisierung der Regelung 65
3.7.4 Erste Ergebnisse der Regelung 67

4 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK **70**

ANHANG A: ABBILDUNGSVERZEICHNIS **73**

ANHANG B: LITERATURVERZEICHNIS **74**

1 Einleitung

Vor dem Hintergrund des ständig steigenden Energiebedarfs der Menschheit, der begrenzten Verfügbarkeit fossiler Brennstoffe, sowie der Einsicht, daß deren ungehemmte Verwendung ökologisch nicht zu verantworten ist, besteht ein großer Bedarf an neuen leistungsfähigen Energiequellen. Auf Grund der großen Menge von radioaktiven Materialien, die zwangsläufig mit dem Prozeß der Kernspaltung verbunden sind und oft nur schwer und durch umstrittene Lösungen zu handhaben sind, sowie den von solchen Materialien ausgehenden, schwer abschätzbaren Risiken scheint dieser Prozeß nicht die geeignete Alternative zu fossilen Brennstoffen zu sein. Anders verhält es sich bei der Kernfusion: Hier sind nur äußerst geringe Mengen von radioaktiven Materialien an dem Prozeß beteiligt; insbesondere führt der reguläre Betrieb nicht zu radioaktiven Restprodukten. Leider ist jedoch die Kernfusion mit erheblich größeren physikalischen und technischen Schwierigkeiten verbunden als die Kernspaltung, weshalb die Realisierung eines Fusionsreaktors bisher noch nicht möglich ist. Die vorliegende Arbeit wurde an dem Fusionsexperiment TEXTOR angefertigt, welches helfen soll, einige dieser Schwierigkeiten in den Griff zu bekommen.

Das Prinzip der Kernfusion ist die Verschmelzung von mehreren leichten Atomkernen zu einem schwereren. Die Masse des resultierenden Kernes ist dabei geringer als die Summe der Massen der Ausgangsteilchen; die Massendifferenz wird nach $E=mc^2$ als Energie freigesetzt. Im allgemeinen wird dabei von He^4 als resultierendem Kern ausgegangen[i]. Die Wahrscheinlichkeit, daß 4 einzelne Nukleonen, also 2 Protonen und 2 Neutronen, zu einem He^4 Kern verschmelzen, ist jedoch nahezu 0. Daher müssen andere Kerne für die Fusion verwendet werden. Bei erreichbaren Energien hat dabei der Prozeß

$$\underset{}{D^2 + T^3 \rightarrow He^4} \quad + \quad \underset{}{n}$$
$$\underset{3{,}5\,MeV}{} \quad \underset{14{,}1\,MeV}{}$$

den höchsten Wirkungsquerschnitt und ist daher derjenige, der bei allen Fusions-experimenten betrachtet wird. Damit dieser Prozeß stattfindet, ist jedoch die Überwindung der Coulomb–Barriere, also der elektrostatischen Abstoßung zwischen den Kernen, notwendig. Rechnerisch ist dazu eine Temperatur von etwa $5 \cdot 10^9$ K notwendig, tatsächlich findet jedoch schon bei Temperaturen, die um eine bis zwei Zehnerpotenzen niedriger liegen, eine nennenswerte Durchtunnelung der Coulomb–Barriere statt. Die Wahrscheinlichkeit für diese Durchtunnelung bei einem Stoß ist dabei abhängig von der Kernladungszahl und der Relativgeschwindigkeit der Teilchen zueinander. Die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß wiederum ist abhängig von der Dichte der Teilchen.

---

[i] Nur bei sehr leichten Atomen ist die Masse eines Kerns geringer als die Summe der Massen von Bruchstücken des Kerns; bei sehr schweren Kernen ist das Gegenteil der Fall, was bei dem Prozeß der Kernspaltung ausgenutzt wird.

Für einen selbsterhaltenden Fusionsprozeß müssen die beteiligten Teilchen also eine ausreichend lange Zeit bei hoher Temperatur und relativ hohem Druck eingeschlossen sein. Eine Möglichkeit, mit der gehofft wird, dies zu erreichen, ist der Einschluß eines Plasmas mit magnetischen Feldern. Die derzeit am weitesten verbreitete Magnetfeldkonfiguration für diesen Zweck ist der Tokamak, bei dem das Plasma sich in einem torusförmigen Gefäß befindet. Ein solcher Tokamak mittlerer Größe ist der Jülicher TEXTOR.

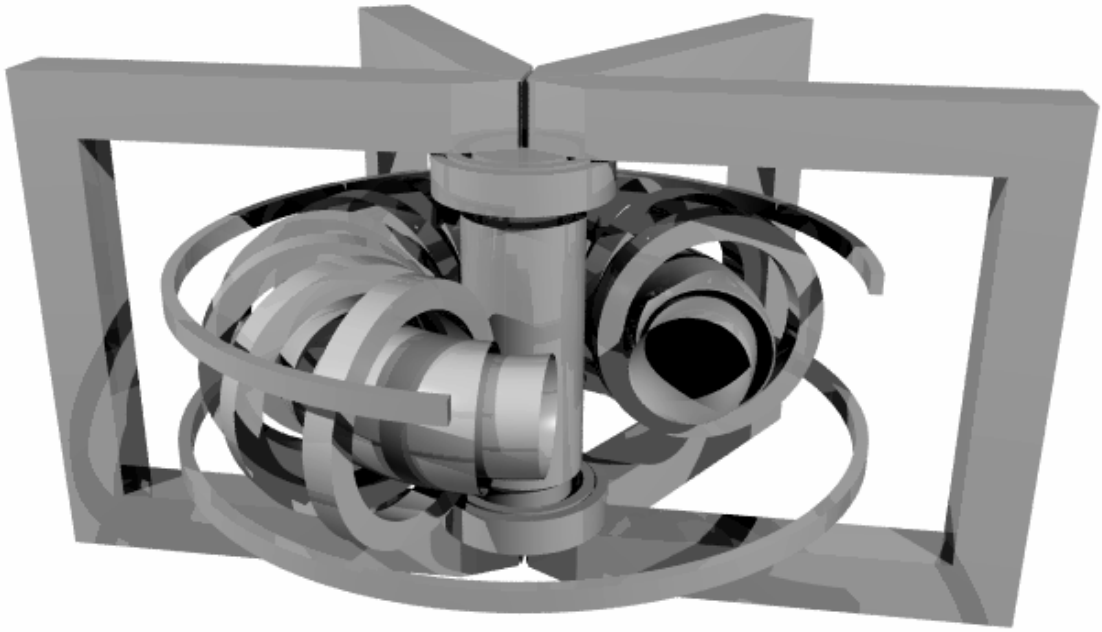

Abbildung 1: Schematische Darstellung von TEXTOR

Bei einem Tokamak erzeugen die Hauptfeldspulen, die das Gefäß ringförmig umschließen, ein toroidales Magnetfeld. Mit diesem alleine ist ein Einschluß des Plasmas jedoch nicht möglich; dieser wird erst durch ein zusätzliches poloidales Magnetfeld erreicht, welches von einem toroidalen Plasmastrom erzeugt wird. Der Plasmastrom wird hierbei induktiv erzeugt, indem das Plasma als (einzige) Sekundärwicklung eines Transformators dient. Dies führt zu einer prinzipiellen Schwierigkeit von Tokamaks: der Plasmastrom – und somit auch der Einschluß des Plasmas – wird nur durch den Anstieg des magnetischen Flusses erreicht; da dieser begrenzt ist, ist also nur ein gepulster Betrieb von Tokamaks möglich.

Eine Bestrebung bei Tokamaks ist es, die Dauer des Flußhubes und somit der Entladung zu verlängern. So wurde erst kürzlich (1994) an TEXTOR die maximale Dauer einer Entladung auf nun 10 Sekunden verdoppelt. Bei dem geplanten internationalen

Forschungsreaktor ITER ist eine Pulsdauer von bis zu 100 Sekunden vorgesehen. Neben den vielen technischen Schwierigkeiten, welche die Erzeugung von solch langen Entladungen mit sich bringt, treten hierbei auch hohe Anforderungen an die Erfassung und Auswertung von Meßdaten auf.

In vielen Fällen war es bisher üblich, gemessene Daten in der Pause zwischen zwei Entladungen auszuwerten und die Parameter für die nächste Entladung auf Grund der so erzielten Ergebnisse neu einzustellen. Während dies bei Entladungen, die nur wenige Sekunden dauern, im allgemeinen keine entscheidende Einschränkung darstellt, ist es bei langen Entladungsdauern wünschenswert und oft sogar notwendig, Parameter auf Grund von Meßergebnissen während der Entladung zu verändern. Hierzu sind Verfahren notwendig, die in der Lage sind, innerhalb kürzester Zeit die gewünschten Ergebnisse bereit zu stellen.

Die in den vergangenen Jahren populär gewordenen sogenannten neuronalen Netze und die in Verbindung mit diesen verwendeten numerischen Verfahren bieten eine Möglichkeit, an Stellen, wo konventionelle Verfahren den Anforderungen nicht gerecht werden, oft noch zu guten Ergebnissen zu gelangen. Durch ihre Eigenschaft, unbekannte Funktionen in einer numerisch meist sehr stabilen Art approximieren zu können und die Berechnung der Funktionswerte mit großer Geschwindigkeit ausführen zu können sind sie an vielen Stellen anderen Verfahren überlegen. Bedingt durch ihren Aufbau bieten neuronale Netze zudem in einfacher Form die Möglichkeit zur Parallelisierung der Funktionsberechnung, so daß sich die benötigte Rechenzeit mit geeigneten Geräten fast beliebig reduzieren läßt.

Oft wird in Anbetracht dieser Vorteile jedoch nicht beachtet, daß durchdachte konventionelle Verfahren in vielen Fällen den neuronalen Netzen ebenbürtig oder sogar überlegen sind. So sind konventionelle Verfahren im allgemeinen flexibler, da das zeitaufwendige Training des Netzes entfällt. Auch ist es bei neuronalen Netzen nahezu unmöglich vorherzusagen, welch Ergebnisse das System liefert wenn unerwartete Eingangsdaten angelegt werden, und die Anforderung an die Eingangsdaten, daß immer eine feste Anzahl von Werten vorliegt, kann nicht in allen Fällen sinnvoll erfüllt werden. Daher ist es wichtig, vor jedem Einsatz von neuronalen Netzen oder vergleichbaren Methoden genau zu überprüfen, ob das gewünschte Ergebnis nicht auch mit sorgfältig implementierten konventionellen Methoden erreicht werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Fälle untersucht, bei denen sich die Anwendung von neuronalen Netzen anbot. Im ersten Fall, der Ionentemperaturbestimmung aus Ladungsaustauschspektren, waren für ähnliche Aufgaben an anderen Stellen bereits mehrfach neuronale Netze eingesetzt worden, da die verwendeten konventionellen Verfahren den Geschwindigkeitsansprüchen nicht genügten. Im zweiten Fall, der tomographischen Rekonstruktion von Abstrahlungsverteilungen aus Bolometriedaten, konnte bisher noch kein Verfahren entwickelt werden, das in der Lage war, aus den vorhandenen Daten Verteilungen mit der gewünschten poloidalen Auflösung zu berechnen.

Bei der Ionentemperaturbestimmung aus Ladungsaustauschspektren werden neutrale Lithiumatome in das Plasma injiziert. Diese bewirken durch Ladungsaustausch die Emission

von Spektrallinien anderer Ionen, wobei in dieser Arbeit eine von vollständig ionisiertem Kohlenstoff C^{6+} emittierte Linie betrachtet wurde. Durch die thermische Bewegung der Ionen sind die emittierten Linien dopplerverbreitert, so daß aus dem Ausmaß dieser Verbreiterung die Ionentemperatur der emittierenden Spezies bestimmt werden kann. Da jedoch Zeeman– und Feinstrukturaufspaltung ebenfalls zur Verbreiterung der betrachteten Linien beitragen, wird die Bestimmung der thermischen Verbreiterung alleine erheblich erschwert. Möglich wird diese nur dadurch, daß eine theoretische Modellrechnung für die betrachteten Spektren existiert, welche alle betrachteten Verbreiterungen berücksichtigt. Diese Modellrechnung ist jedoch sehr rechenintensiv, so daß es in vielen Fällen nicht praktikabel ist, durch Anpassen von berechneten Spektren an die gemessenen die Ionentemperatur zu bestimmen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher die Möglichkeit zum Einsatz von neuronalen Netzen für die Auswertung der betrachteten Spektren untersucht und mit anderen Möglichkeiten verglichen. Dazu wurde zunächst ein Verfahren zum Anpassen der theoretisch berechneten Spektren an die gemessenen entwickelt um eine möglichst sichere Vergleichsmöglichkeit für die betrachteten Verfahren zu erhalten. Mit diesem wurden auch die für den Einsatz eines neuronalen Netzes erforderlichen Trainingsdaten berechnet. Anschließend wurden zwei weitere konventionelle Verfahren und eines, welches ein neuronales Netz verwendet, entwickelt und in Hinblick auf Genauigkeit der Ergebnisse, benötigte Rechenzeit sowie das Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten untereinander und mit dem Referenzverfahren verglichen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur tomographischen Rekonstruktion von Abstrahlungsverteilungen aus Bolometriedaten entwickelt. Bei der Bolometrie wird die aus dem Plasma emittierte elektromagnetische Strahlungsleistung in einem großen Wellenlängenbereich (etwa 2 – 2000 Å) gemessen. Jeder der Sensoren nimmt dabei nur Strahlung aus einem kleinen Raumwinkel auf, so daß der von jedem einzelnen Sensor betrachtete Bereich oft als (Sicht-)Linie angenommen wird. An TEXTOR steht eine Meßapparatur mit 26 Sensoren zur Verfügung, von denen 25 auf den emittierenden Bereich des Plasmas ausgerichtet sind. Diese Sensoren sind in 3 Kameras fest und unbeweglich montiert.

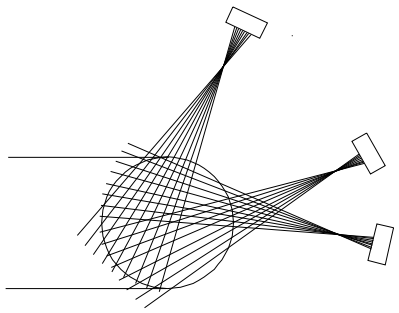

Abbildung 2: Lage der Bolometer-Sensoren

Auf Grund der geringen Anzahl und festen Position von Sichtlinien sind die üblichen tomographischen Verfahren hier nur unter sehr starken Einschränkungen einsetzbar. Eine dieser Einschränkungen, die für das bisher an dieser Stelle eingesetzte Verfahren galt, war die Beschränkung auf eine Fourierkomponente in poloidaler Richtung. Da jedoch angenommen wurde, daß bei einigen vorkommenden Abstrahlungsverteilungen in poloidaler Richtung mehrere Maxima auftreten, bestand hier Bedarf an einem neuen Verfahren.

Zu diesem Zweck wurde im Laufe dieser Arbeit ein Verfahren entwickelt, welches in der Lage ist, mit hoher Geschwindigkeit Rekonstruktionen mit erheblich höherer poloidaler Auflösung als bisher zu errechnen. Die dabei verwendete Methodik entspricht im wesentlichen der von neuronalen Netzen her bekannten. Hier wurde jedoch die Funktion, welche approximiert werden soll, als linear angenommen, was auf Grund des zugrunde liegenden Problems sinnvoll erscheint. Dadurch handelt es sich trotz der übereinstimmenden Methodik nach der üblichen Terminologie nicht um ein neuronales Netz.

Bei der Berechnung der Rekonstruktionsabbildung – die dem Training eines neuronalen Netzes entspricht – wurde von der leichten Parallelisierbarkeit einer solchen Berechnung Gebrauch gemacht, indem das Verfahren auf einem Transputer mit mehreren Prozessoren implementiert wurde. Nur durch diese Parallelisierung war die Berechnung in dem durchgeführten Umfang überhaupt möglich, da die Rechenzeit andernfalls unpraktikable Ausmaße angenommen hätte.

Eine direkte Anwendung des entwickelten Rekonstruktionsverfahrens für TEXTOR ist die Regelung der Strahlungskühlung, die ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit implementiert wurde. Bei der Strahlungskühlung werden dem Plasma gezielt leichte Verunreinigungen zugeführt. Ohne diese Verunreinigungen ist die Leistungsabstrahlung fast ausschließlich vor den Limitern konzentriert, wodurch sich eine starke thermische Belastung dieser ergibt. Durch die zugeführten leichten Verunreinigungen wird der strahlende Bereich in poloidaler Richtung ausgedehnt, so daß die thermische Belastung auf eine größere Fläche verteilt wird. Dabei ist es wünschenswert, die Zufuhr von leichten Verunreinigungen so zu regeln, daß ein konstantes Verhältnis von zugeführter zu abgestrahlter Leistung eingehalten wird.

Die größte Schwierigkeit besteht hierbei im allgemeinen in der schnellen Berechnung der insgesamt abgestrahlten Leistung. Mit dem hier entwickelten Verfahren ist diese jedoch in sehr kurzer Zeit möglich, so daß der Einsatz für die Regelung der Strahlungskühlung sich anbot. Die ersten dabei erzielten Ergebnisse deuten auf eine ausgezeichnete Funktion des Verfahrens hin

2 Ionentemperaturbestimmung aus Ladungsaustauschspektren

Die Bestimmung der Ionentemperatur bestimmter Spezies aus Ladungsaustauschspektren ist eines der Verfahren, welches an TEXTOR [1][2] und an anderen Fusionsexperimenten [3][4] zur Temperaturmessung eingesetzt wird. Die Auswertung der gemessenen Spektren war jedoch bisher stets mit erheblichem Rechen– und somit auch Zeitaufwand verbunden und bot sich daher für den Einsatz von neuen Methoden der Datenverarbeitung, die eine signifikante Reduzierung des Rechenaufwandes versprechen, an.

Eine solche Methode stellen neuronale Netze dar: Von diesen ist schon auf Grund ihrer Funktionsweise abgesehen von einem einmaligen Prozeß, dem sogenannten Training, ein deutlich geringerer Rechenaufwand als der für konventionelle Verfahren übliche zu erwarten. Zudem lassen sich neuronale–Netz–Methoden auf einfache Weise parallelisieren, um so nochmals eine höhere Verarbeitungsgeschwindigkeit zu erzielen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere konventionelle Verfahren zur Auswertung von Ladungsaustauschspektren implementiert und für dieses spezielle Problem optimiert. Die Auswertung mit neuronalen Netzen wurde mit einem speziellen Netzwerktyp, der bei ähnlichen Problemstellungen bereits verwendet wurde [5][6], ausgearbeitet und mit den konventionellen Verfahren in Hinblick auf Geschwindigkeit, Genauigkeit und Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten verglichen.

2.1 Problemstellung

Bei der Ladungsaustauschspektroskopie werden Spektrallinien betrachtet, die von hoch ionisierten Atomen des Plasmas emittiert werden. Im Verlaufe dieser Arbeit wurde als strahlende Spezies C^{6+} betrachtet; Theorie und Methodik lassen sich jedoch auch auf andere wasserstoffähnliche und mit geringen Änderungen in der Theorie auch für lithiumähnliche Ionen anwenden[ii].

Die Emission auf den betrachteten Linien wird durch folgenden Prozeß erreicht [7]: Ein Strahl von neutralen Lithium Atomen wird mit einer Energie von etwa 20 bis 30 keV in das Plasma injiziert, wobei die nur lose gebundenen äußeren Elektronen des Lithiums in angeregte Zustände von C^{6+} eingefangen werden können, und von wo aus sie unter Emission einer charakteristischen Linienstrahlung in niedrigere Energieniveaus fallen. Im Fall von Kohlenstoff wird so unter anderem durch den Übergang von n=8 nach n=7 eine Spektrallinie bei 529 nm emittiert; diese wurde bei den in dieser Arbeit verwendeten Messungen betrachtet.

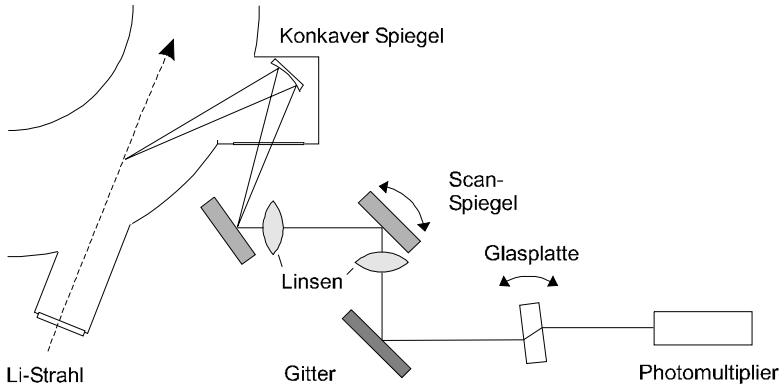

Abbildung 3: Schematischer Aufbau der Meßeinrichtung

Diese Linie wird nun, wenn sie in einem Plasma beobachtet wird, durch verschiedene Prozesse aufgespalten und verbreitert [8]: Feinstruktur und Zeemaneffekt sorgen dafür, daß die Linie in mehrere dicht beieinander liegende Linien aufgespalten wird. Von diesen ist jede einzelne durch die thermische Bewegung der Ionen dopplerverbreitert. Setzt man ein lokales thermisches Gleichgewicht und somit eine maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Ionen voraus, so verbreitert sich jede dieser Linien in Form einer Gaußglocke:

$$I(\lambda) \propto \frac{1}{\Delta\lambda} \cdot e^{-\ln 2 \cdot \left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda}\right)^2}$$, wobei

[ii] Tatsächlich wurden die Auswerteverfahren auch für Ne^{10+} und mit der geringfügig geänderten Simulation der Spektren auch für Si^{12+} angewandt.

$\Delta\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{kT_{C^{6+}}}{2mc^2}}$ die Halbwertsbreite und

m die Masse des Kohlenstoffions ($1.99 \cdot 10^{-26}$ kg oder 12.011 amu) ist.

Das insgesamt von diesem Übergang emittierte Spektrum läßt sich also durch eine gewichtete Summe von Gaußglocken beschreiben:

$$I(\lambda) \propto \sum_{j=0}^{\text{KompZahl}} \frac{s_j}{\Delta\lambda_j} \cdot e^{-\ln 2 \cdot \left(\frac{\lambda - \lambda_j}{\Delta\lambda_j}\right)^2} ,$$

wobei λ_j die Wellenlänge, s_j die Intensität und $\Delta\lambda_j$ die Halbwertsbreite der *j*ten Komponente des Spektrums ist und **KompZahl** die Anzahl der Komponenten des Spektrums ist. Das gemessene Spektrum ist zudem noch durch die instrumentelle Breite der Meßapparatur verbreitert.

In dem betrachteten Bereich des Magnetfeldes B (um 2 Tesla) und der Temperatur T (etwa 50 – 1000 eV) läßt sich die Einhüllende des resultierenden Spektrums wiederum gut durch eine Gaußglocke beschreiben [9]. Deren Halbwertsbreite wird durch die Temperatur, die Aufspaltung des Spektrums und die instrumentelle Breite der Meßapparatur bestimmt. Wird aus der Halbwertsbreite direkt eine Temperatur berechnet, so liegt diese daher höher als die tatsächliche Temperatur. Diese höhere Temperatur wird meist als „Scheintemperatur“ bezeichnet.

Nun steht ein Verfahren zur Verfügung, welches für solche Spektren Modellrechnungen ermöglicht. Mit diesem können Tabellen errechnet werden, welche den Faktor angeben, mit dem die gemessene Halbwertsbreite eines Spektrums multipliziert werden muß, um die Verbreiterung durch die Aufspaltung zu kompensieren. Die Verbreiterung durch die instrumentelle Breite der Meßapparatur läßt sich explizit herausrechnen:

$$\Delta^2_{Gesamt} = \Delta^2_T + \Delta^2_{Instr.} \rightarrow \Delta_T = \sqrt{\Delta^2_{Gesamt} - \Delta^2_{Instr.}}$$

Die Temperatur ergibt sich dann als

$$T = \frac{4mc^2}{k} \cdot \frac{\Delta_T}{\lambda_0}$$

2.2 Modellrechnung für die Spektren

Die hier verwendete Modellrechnung basiert in wesentlichen Teilen auf einer von Dr. John Hey entwickelten Rechnung [10]. Die Theorie zu diesen Rechnungen findet sich unter anderem in [11][12][13] und wird an dieser Stelle nur kurz skizziert.

Für die Modellrechnung muß zunächst die Anzahl der beteiligten Komponenten im Spektrum ermittelt werden. Zu jeder dieser Komponenten muß dann deren Wellenlänge und relative Intensität berechnet werden. Im Folgenden bezeichne n die Hauptquantenzahl des oberen und n_{pr} die des unteren beteiligten Niveaus, bei dem hier betrachteten Übergang also n=8 und n_{pr}=7. Entsprechend bezeichnen l, m, s und l_{pr}, m_{pr}, s_{pr} die weiteren Quantenzahlen der beteiligten Niveaus und j bzw. j_{pr} den Gesamtdrehimpuls l+s bzw. l_{pr}+s_{pr}.

Die Anzahl der Komponenten ergibt sich unmittelbar aus den Auswahlregeln: erlaubt sind nur die Übergänge $|n,l,m\rangle \rightarrow |n_{pr},l_{pr},m_{pr}\rangle$ für die $|l-l_{pr}|=1$ und $(m-m_{pr})\in\{-1,0,1\}$. Für die hier betrachteten Übergänge, bei denen $n > n_{pr}$, ergibt sich die Anzahl der Komponenten damit zu $KompZahl = 2\left(12n_{pr}^2 - 14n_{pr} + 7\right)$.

Die Wellenlänge der einzelnen Komponenten ergibt sich aus der Differenz der Energien der beteiligten Niveaus. Die Energie eines Niveaus ohne äußeres Magnetfeld ist unter Berücksichtigung der Feinstrukturaufspaltung [11]

$$E = \frac{2R_y}{\alpha^2}\left(1+\frac{m_e}{m_{Nucl}}\right)^{-1}\left(\left(1+\left(\frac{Z\alpha}{n-\varepsilon}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)+\Delta E_{Lamb} = E_0 + \Delta E_{Lamb}$$

wobei

$$\varepsilon = j+\tfrac{1}{2}-\sqrt{\left(j+\tfrac{1}{2}\right)^2-(Z\alpha)^2}\,.$$

Der Lamb–Shift ΔE_{Lamb} wird bei dieser Rechnung nur für l–Werte von 0,1 und 2 berücksichtigt, da er für höhere Werte vernachlässigt werden kann [14]. Dieser ist

$$\Delta E_{Lamb} = \frac{8}{3\pi}\frac{Z^4\alpha^3}{n^3}R_y\left(\frac{m_{Nucl}}{m_{Nucl}-m_e}\right)^2\left(\frac{m_{Nucl}}{m_{Nucl}+m_e}T_1+T_2\right),$$

$$T_1 = \left(\frac{11}{24}-\frac{1}{5}-2\cdot\ln(Z\alpha)+\frac{m}{m_{Nucl}}\right)\delta_{l0}-\ln\left(K_0(n,l)\right)$$

$$c_{lj} = \begin{cases} (l+1)^{-1} & \text{wenn } j = l + \frac{1}{2} \\ -l^{-1} & \text{wenn } j = l - \frac{1}{2} \end{cases},$$

α: Feinstrukturkonstante, Z: Kernladungszahl, m_e, m_{Nucl}: Masse des Elektrons bzw. Atomkerns, R_y: Rydbergkonstante. $\ln(K_0(n,l))$ ist dabei der sogenannte Bethe–Logarithmus, der im vorliegenden Fall approximiert wird durch

$$\ln\left(K_0(n,l)\right) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

α_1 und α_2 sind hierbei von l anhängige Konstanten, deren Werte für die hier vorkommenden l–Werte in [14] nachgesehen werden können.

Wird ein äußeres Magnetfeld B mit berücksichtigt, so ergibt sich für kleine Magnetfelder eine Aufspaltung:

$$E = E_0 + \Delta E_{Lamb} + mg\mu_B B$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ und dem Landé–Faktor

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}.$$

Diese Aufspaltung wird als *anormaler Zeemaneffekt* bezeichnet und ist gültig, wenn sie klein gegen die Feinstrukturaufspaltung ist. Ist die Aufspaltung durch das Magnetfeld in der gleichen Größenordnung wie die Feinstrukturaufspaltung so ist

$$E = \frac{E_+ + E_-}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(E_+ - E_-\right)^2}{4} + \delta E^2},$$

wobei

$$\begin{aligned} E_+ &= E_0 + \Delta E_{Lamb}(n,l,j) + mg(l,j)\mu_B B \\ E_- &= E_0 + \Delta E_{Lamb}(n,l,j') + mg(l,j')\mu_B B \end{aligned}.$$

Dabei ist $j' = 2 \cdot l - j$, also $|j - j'| = 1$. Der Term mit ´+´ ist zu verwenden, falls $E_+ > E_-$, der Term mit ´–´ im Fall $E_+ < E_-$. Der Effekt wird als *Paschen–Back–Effekt* bezeichnet, und der Term

$$\delta E = \mu_B B \sqrt{\frac{(j_* - l + s)(j_* + l - s)(j_* + l + s + 1)(-j_* + l + s + 1)(j_*^2 - m^2)}{4 j_*^2 (2 j_* - 1)(2 j_* + 1)}}$$

als *Paschen–Back–Energie*. j_* bezeichnet dabei den jeweils größeren Wert von j und j'. Bei den hier betrachteten Feldstärken von etwa 1 bis 2 Tesla ist die Aufspaltung durch das Magnetfeld in der gleichen Größenordnung wie die Feinstrukturaufspaltung, daher muß hier die aufwendigere Rechnung mit Berücksichtigung der Paschen–Back–Energie verwendet werden.

Mit dieser Rechnung kann die Energie für jeden Zustand ermittelt werden und somit auch die Energiedifferenzen für die nach den Auswahlregeln erlaubten Übergänge und somit die von diesem Übergang emittierte Wellenlänge.

Um die Intensitäten der einzelnen Komponenten zu berechnen, werden mit dem Racah–Symbol–Formalismus die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zuständen berechnet. Demnach ist die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand $|n, l, m, j\rangle$ zu einem Zustand $|n_{pr}, l_{pr}, m_{pr}, j_{pr}\rangle$ gegeben durch [13]

$$w^{nlmj}_{n_{pr} l_{pr} m_{pr} j_{pr}} = R^{nl}_{n_{pr} l_{pr}} \cdot \max(l, l_{pr})(2j+1)(2j_{pr}+1) \begin{Bmatrix} l & l_{pr} & 1 \\ j_{pr} & j & s \end{Bmatrix}^2 \begin{pmatrix} j & 1 & j_{pr} \\ -m & q & m_{pr} \end{pmatrix}^2,$$

wobei {...} das Racah–6j Symbol und (...) das Racah–9j Symbol bezeichnen und

$$R^{nl}_{n_{pr} l_{pr}} = \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n_{pr} l_{pr}}(r)\, dr$$

die Überlappung der radialen Anteile der beteiligten Wellenfunktionen ist. Die Gesamtintensität der emittierten Linie ist

$$I = \left(\pm c_1 \sqrt{w^{nlmj}_{n_{pr} l_{pr} m_{pr} j_{pr}}} \pm c_2 \sqrt{w^{nlmj'}_{n_{pr} l_{pr} m_{pr} j_{pr}}} \pm c_3 \sqrt{w^{nlmj}_{n_{pr} l_{pr} m_{pr} j'_{pr}}} \pm c_4 \sqrt{w^{nlmj'}_{n_{pr} l_{pr} m_{pr} j'_{pr}}} \right)^2$$

mit

$$c_1 = \sqrt{\frac{(\Delta_3 + \Delta_1)(\Delta_4 + \Delta_2)}{4\Delta_3\Delta_4}},\ c_2 = \sqrt{\frac{(\Delta_3 + \Delta_1)(\Delta_4 - \Delta_2)}{4\Delta_3\Delta_4}},$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{(\Delta_3 - \Delta_1)(\Delta_4 + \Delta_2)}{4\Delta_3\Delta_4}},\ c_4 = \sqrt{\frac{(\Delta_3 - \Delta_1)(\Delta_4 - \Delta_2)}{4\Delta_3\Delta_4}},$$

$$\Delta_1 = E_+ - E_-,\ \Delta_2 = E_{pr+} - E_{pr-},\ \Delta_3 = E - E',\ \Delta_4 = E_{pr} - E'_{pr}.$$

Die Vorzeichen in dem Term für *I* sind durch die Bedingung bestimmt, daß die Komponenten sich bei steigender Feldstärke nicht kreuzen.

Die Abstrahlung dieser Linien findet nicht isotrop statt. Ist θ der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und dem *B*-Feld, so ist die beobachtete Intensität daher zudem proportional zu

$$\frac{3}{8\pi}\sin^2(\theta), \qquad \text{falls } m = m_{pr}, \text{ bzw.}$$

$$\frac{3}{16\pi}\left(1+\cos^2(\theta)\right), \qquad \text{falls } \left|m - m_{pr}\right| = 1.$$

Mit diesem Verfahren läßt sich somit für jede Komponente des Spektrums die Intensität der beobachteten Linie errechnen.

Somit können für alle Komponenten des Spektrums Amplitude und Wellenlänge errechnet werden. Durch Dopplerverbreiterung und die instrumentelle Breite der Meßapparatur ist nun jede Komponente in Form einer Gaußglocke verbreitert. Die i^{te} Komponente läßt sich also durch

$$I_i(\lambda) = s_i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_i} \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

beschreiben. σ_i ist dabei gegeben durch

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{Instr.}^2 + \delta_i^2},$$

wobei σ_{Instr} die instrumentelle Breite der Meßeinrichtung und

$$\delta_i = \lambda_i \sqrt{\frac{kT}{2mc^2}}$$

die Dopplerverbreiterung der betreffenden Komponente ist. Somit ist das gesamte Modellspektrum beschrieben durch

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{\text{KompZahl}} \frac{s_i}{\sigma_i} \cdot e^{\frac{(\lambda-\lambda_i)^2}{\sigma_i^2}}.$$

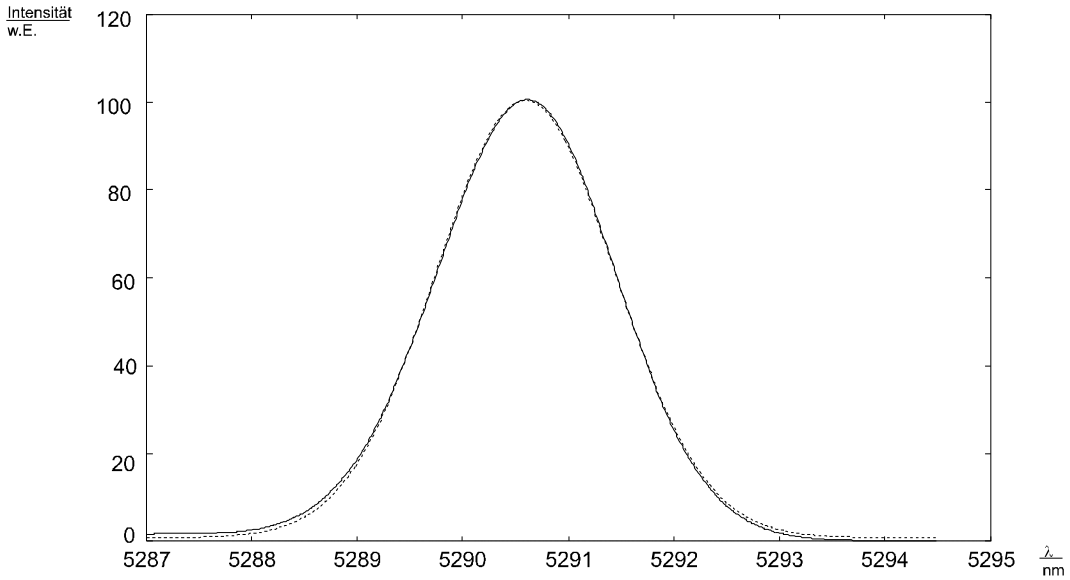

Abbildung 4: Simuliertes Spektrum für B=1,8 Tesla, T=250 eV und $\Delta_{instr.}$=0,1 mm sowie angepaßte Gaußglocke (gestrichelt).

2.3 Temperaturbestimmung mit konventionellen Methoden

2.3.1 Anpassen von Gaußfunktionen

Das bisher am häufigsten verwandte Verfahren zur Bestimmung der Ionentemperatur [15] ist das Anpassen von Gaußfunktionen der Form

$$f(x) = G + A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dabei können diese Funktionen mit vier Parametern an die gemessenen Spektren angepaßt werden: Die Grundlinie *G*, ein Amplitudenfaktor *A*, die Standardabweichung σ und die Verschiebung entlang der *x*–Achse, x_0. Aus der so erhaltenen Standardabweichung kann nun, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, die „Scheintemperatur" bestimmt werden, um aus dieser bei bekanntem B–Feld mit Hilfe einer Korrekturtabelle die tatsächliche Ionentemperatur zu ermitteln.

Unter dem *Anpassen* von einer Modellfunktion *f* an ein gemessenes Spektrum $((x_0,y_0),...,(x_n,y_n))$ ist hier und in den folgenden Abschnitten zu verstehen, daß die mittlere quadratische Abweichung

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2$$

minimiert werden soll.

Das Anpassen von Gaußfunktionen wurde im Rahmen dieser Arbeit mittels eines Gradientenabstiegsverfahrens durchgeführt. Dazu werden die anzupassenden Parameter zunächst grob geschätzt; mit diesen Schätzwerten wird dann eine erste Näherung ausgerechnet. Nun wird der verbleibende Fehler errechnet und nach den einzelnen Parametern abgeleitet; diese werden in Richtung des kleineren Fehlers verändert. Dieser Zyklus – Restfehler errechnen, nach den Parametern ableiten, Parameter anpassen – wird dann so lange wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erreicht ist.

Als erste grobe Schätzung wurde hier für die Grundlinie der kleinste im gemessenen Spektrum vorkommende Wert genommen. Die Amplitude wurde durch die größte vorkommende Wertedifferenz, x_0 durch den Schwerpunkt und σ durch die Breite des Bereiches um x_0, in dem die gemessenen Werte höher als $A \cdot e^{-½}$ über der Grundlinie liegen, abgeschätzt. Der Restfehler ist

$$F = \sum_{i=0}^{Wertezahl} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{Wertezahl} \left(y_i - G - A \cdot e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}} \right)^2 ,$$

wobei (x_i,y_i) die gemessenen Wertepaare sind. Somit ergeben sich für die Ableitungen nach den einzelnen Parametern:

$$\frac{\partial F}{\partial G} = -2 \cdot \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} y_i - f(x_i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = -2 \cdot \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} (y_i - f(x_i)) \cdot e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = -\frac{2A}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} (y_i - f(x_i)) \cdot e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot (x_i - x_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\frac{2A}{\sigma^3} \cdot \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} (y_i - f(x_i)) \cdot e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot (x_i - x_0)^2$$

Ein Schritt des Gradientenabstiegs geschah hier nach $P' = P - \alpha_P \cdot \frac{\partial F}{\partial P}$, wobei $P \in \{G, A, x_0, \sigma\}$ und α_P ein zu dem jeweiligen Parameter gehörender Anpaßfaktor ist. Diese Anpaßfaktoren wurden verkleinert, wenn sich das Vorzeichen der zugehörigen Ableitung bei einem Schritt änderte und verkleinert, falls dies nicht der Fall war. Durch das dynamische Verändern der Anpaßfaktoren wird eine erheblich schnellere Konvergenz des Verfahrens erreicht.

Als Abbruchkriterium wurde hier $\left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^2 < \varepsilon$ verwendet. Dies kann zwar theoretisch auch bei flachen Stellen, die nicht bei einem Minimum der Fehlerfunktion liegen, erfüllt werden, jedoch konnte ein solches Verhalten in der praktischen Anwendung nicht beobachtet werden.

Im Allgemeinen kann es bei einem Gradientenabstiegsverfahren leicht passieren, daß das Verfahren in einem lokalen Minimum der betrachteten Funktion steckenbleibt. Bei fast allen hier betrachteten Fällen entsprach jedoch die angepaßte Funktion sehr gut dem erwarteten Verlauf, so daß davon ausgegangen werden kann, daß der Gradientenabstieg zu dem gesuchten Minimum oder zumindest zu einem sehr dicht an diesem liegenden Minimum geführt hat. Lediglich bei Spektren, die sehr stark von der Form einer Gaußglocke abwichen (etwa durch Störungen in der Messung) kam es vor, daß der Verlauf der angepaßten Funktion nicht dem erwarteten entsprach.

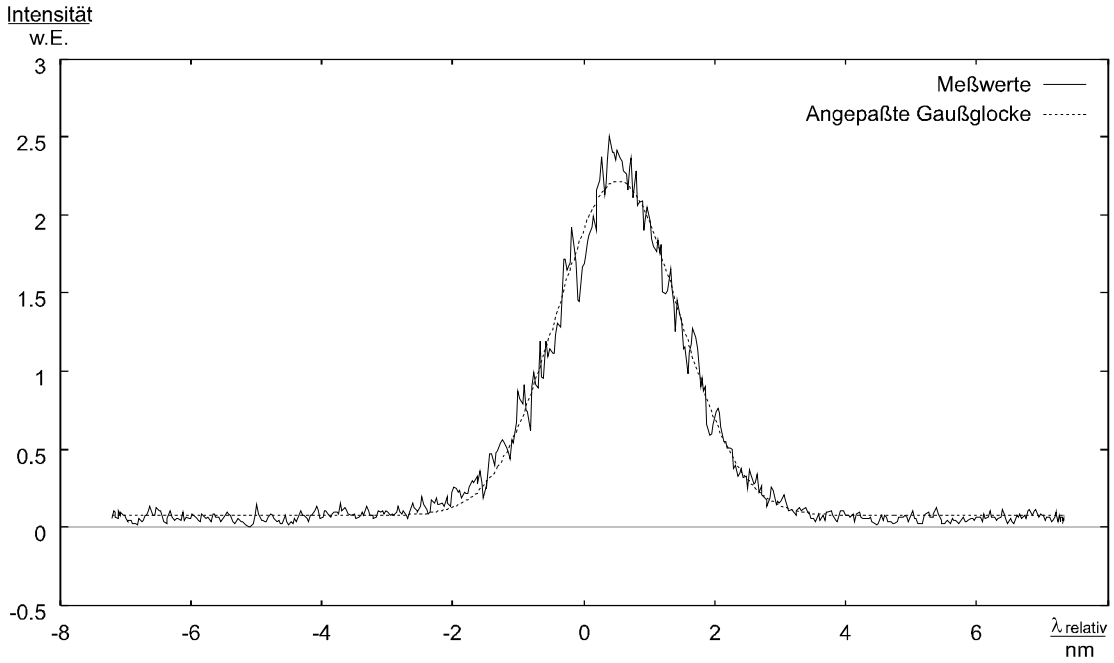

Abbildung 5: Gemessenes Spektrum und mit Gradientenabstieg angepaßte Gaußkurve

2.3.2 Anpassen von simulierten Spektren

Bei der Bestimmung der Ionentemperatur aus Ladungsaustauschspektren wird davon ausgegangen, daß die Theorie (vgl. Abschnitt 2.2) eine passende Beschreibung der Messungen liefert. Daher ist die beste Auswertung, die erreicht werden kann, ein Anpassen von gemäß der Theorie simulierten Spektren an die Messungen. Diese simulierten Spektren werden gemäß Abschnitt 2.2 beschrieben durch

$$I(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \sum_{j=0}^{\text{KompZahl}} \frac{s_j}{\sigma_j} \cdot e^{-4\ln 2 \cdot \frac{\left(\lambda - \lambda_0 - \lambda_j\right)^2}{{\sigma_j}^2}}$$

mit $\sigma_j = \frac{\lambda_j}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m} + W_i^2}$

Ebenso wie beim Anpassen von Gaußfunktionen wurden hier die simulierten Spektren mit Hilfe eines Gradientenabstiegsverfahrens an die Messungen angepaßt. Auch hier ist die Fehlerfunktion wieder

$$F = \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} \left(y_i - f(\lambda_i)\right)^2 .$$

Somit ergibt sich für die Ableitungen nach den einzelnen Parametern

$$\frac{\partial F}{\partial G} = -2 \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} \Theta_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = -2 \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} \Theta_i \cdot f(\lambda_i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{Ac^2}{k}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} \Theta_i \cdot \sum_{j=0}^{\text{KompZahl}} \frac{\lambda_j{}^2 \cdot s_j}{\sigma_j{}^3} \cdot e^{-4\ln 2 \frac{\left(\lambda_i-\lambda_0-\lambda_j\right)^2}{\sigma_j{}^2}} \cdot \left(1 - 8\ln 2 \frac{\left(\lambda_i-\lambda_0-\lambda_j\right)^2}{\sigma_j{}^2}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 16A\ln 2 \sum_{i=0}^{\text{Wertezahl}} \Theta_i \cdot \sum_{j=0}^{\text{KompZahl}} (\lambda_i - \lambda_0 - \lambda_j) \cdot \frac{1}{\sigma_j{}^3} \cdot e^{-4\ln 2 \frac{\left(\lambda_i-\lambda_0-\lambda_j\right)^2}{\sigma_j{}^2}}$$

mit $\Theta_i := \left(y_i - G - A \cdot f\left(\lambda_i\right)\right)$

Für das Abbruchkriterium des Verfahrens und das Verhalten bezüglich lokaler Minima gilt das Gleiche wie bei dem Anpassen von Gaußglocken.

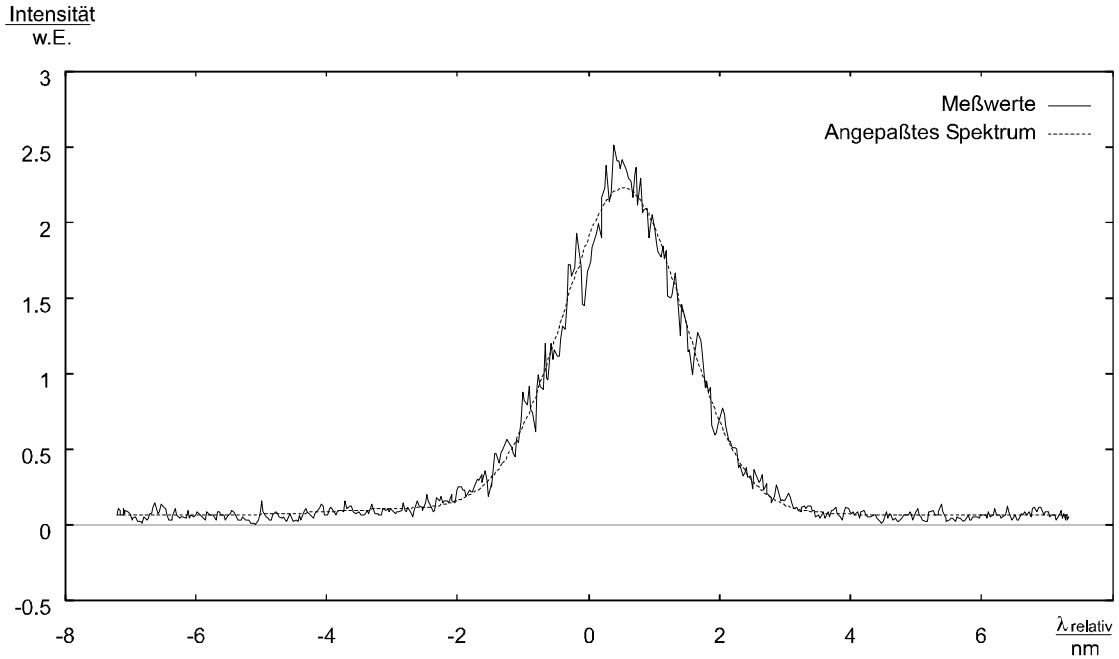

Abbildung 6: Gemessenes Spektrum und angepaßtes simuliertes Spektrum

2.3.3 Ad–hoc Verfahren

Beide bisher vorgestellte Verfahren versuchen den mittleren quadratischen Abstand zwischen einer Modellfunktion und einem gemessenen Spektrum zu minimieren, wobei die

Ionentemperatur sich aus den Parametern der angepaßten Modellfunktion ergeben. Um ein Verfahren, welches die Ionentemperatur auf eine andere Art aus den gemessenen Spektren bestimmt, mit diesen zu vergleichen, wurde noch ein ad–hoc Verfahren entwickelt. Dieses Verfahren läuft folgendermaßen ab:

1.) Die Anzahl der Stützpunkte der Messung wird durch Mittelwertbildung halbiert:
$$y_i' = \frac{1}{2}\left(y_{2i} + y_{2i+1}\right),\ x_i' = \frac{1}{2}\left(x_{2i} + x_{2i+1}\right)$$

2.) Die Meßwerte werden mit einem „moving average"–Filter der Breite 5 geglättet:
$$y_i' = \frac{1}{5}\sum_{j=-2}^{2} y_{i+j}\ .$$

3.) Der am häufigsten vorkommende Wert der geglätteten Daten wird als Grundlinie genommen; diese Grundlinie wird von den geglätteten Meßwerten subtrahiert.

4.) Der Schwerpunkt der Meßwerte wird als x_0 genommen. Um diesen herum wird ein Bereich (ein Viertel aller Meßwerte) festgelegt, der in den folgenden Schritten betrachtet wird. In diesem Bereich wird erneut der Schwerpunkt berechnet und nun als x_0 genommen.

5.) Das Maximum der Meßwerte in dem betrachteten Bereich wird als Amplitude angenommen.

6.) Von dem Maximum ausgehend werden die Meßwerte in beide Richtungen verfolgt, bis der erste Wert, der kleiner als die Hälfte des Maximus ist auftritt. Die Stellen, an denen dieses der Fall ist, werden als Grenzen für den in den nächsten Schritten betrachteten Bereich verwendet.

7.) Der Schwerpunkt der Meßwerte innerhalb des betrachteten Bereiches wird als x_0 genommen.

Die Schritte 5.) bis 7.) werden wiederholt, bis sich die Werte nicht mehr ändern oder eine vorgegebene maximale Anzahl von Iterationen erreicht ist. Aus der Breite des Bereiches, in dem die Meßwerte größer als die Hälfte des Maximalwertes sind, kann nun die „Scheintemperatur" bestimmt werden. Mit dieser kann dann wie bei dem vorher beschriebenem Anpassen von Gaußfunktionen mit Hilfe einer Tabelle die tatsächliche Ionentemperatur bestimmt werden.

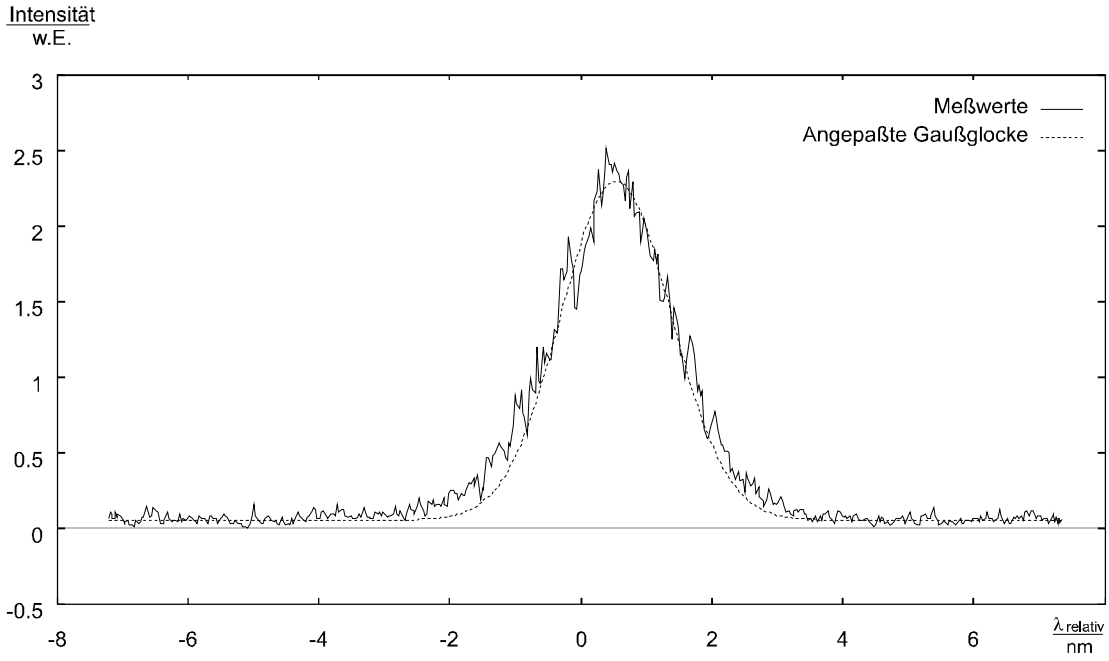

Abbildung 7: Gemessenes Spektrum und mit ad–hoc Verfahren angepaßte Gaußkurve

2.4 Temperaturbestimmung mit neuronalen Netzen

Es gibt zur Zeit eine solche Vielzahl von Methoden und Verfahren, die sich „neuronales Netz“ oder ähnlich nennen, daß es den hiesigen Rahmen sprengen würde, einen umfassenden Überblick vorzustellen. In dieser Arbeit wurde ein spezieller Typ von neuronalen Netzen, das sogenannte „Mehrlagige Perzeptron“ [16] [iii] näher betrachtet, da dieser bereits mehrfach bei ähnlichen Problemstellungen eingesetzt wurde (s.o.). Dieser Typ von neuronalen Netzen wird hier kurz vorgestellt; für eine ausführliche Betrachtung von neuronalen Netzen sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen (z.B. [17]).

2.4.1 Das Mehrlagige Perzeptron

Das Grundelement eines solchen neuronalen Netzes ist das sogenannte Perzeptron; hierbei handelt es sich um ein Element mit einem Ausgang und einem oder mehreren Eingängen. Dieses Perzeptron addiert die Werte E_i aller seiner Eingänge auf, wobei jeder Eingang einzeln mit einem bestimmten Gewicht multipliziert wird. Auf die so erhaltene Summe wird nun eine (im allgemeinen nichtlineare) Funktion angewandt; das Ergebnis dieser Funktion wird dann als Ausgangswert A des Perzeptron verwendet. Für ein einzelnes Perzeptron gilt also $A = f\left(\sum_{\text{Eingänge}} w_i \cdot E_i \right)$,

wobei E_i die Werte der Eingänge und w_i die jeweils zugehörigen Faktoren sind. Diese Faktoren werden in der Terminologie der neuronalen Netze meist *Gewichte* genannt, woraus auch die übliche Bezeichnung w (von dem englischen *weight*) zu erklären ist. Die Funktion, die auf die Summe angewandt wird, wird Übertragungsfunktion genannt, für diese wird im allgemeinen eine Sigmoid–Funktion (etwa $f(x)=\tanh(x)$) verwendet. Die Perzeptrons werden im allgemeinen *Neuronen* genannt, motiviert durch funktionelle Ähnlichkeiten mit biologischen Neuronen in Nervensystemen.

Bei dem Mehrlagigen Perzeptron werden nun solche Neuronen in Lagen zusammengefaßt und so miteinander verbunden, daß die Ausgänge der Neuronen in einer Lage als Eingänge der Neuronen in der nächsten Lage dienen. Nach ihrer Funktion bezeichnet man die Lagen als Eingangslage, versteckte Lage und Ausgangslage.

[iii] Auch in der deutschsprachigen Literatur wird dies oft mit dem englischen Begriff *Multilayer Perceptron* bezeichnet

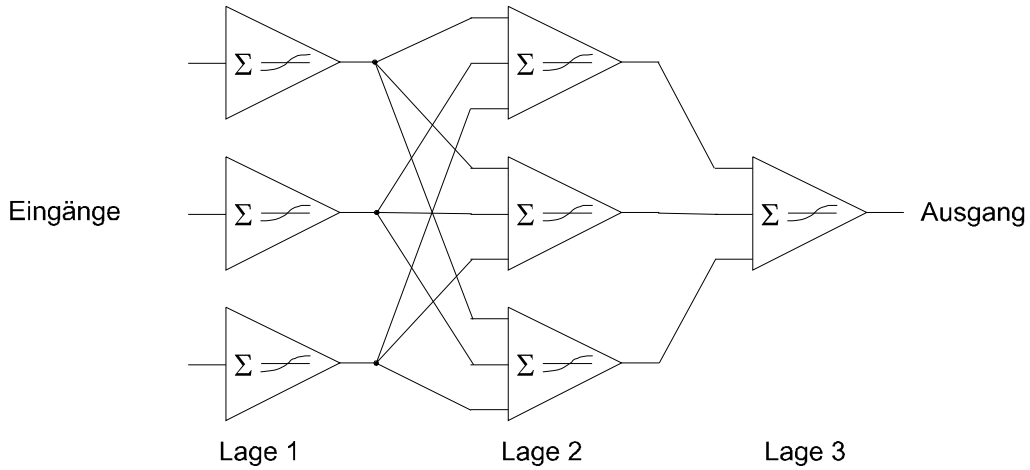

Abbildung 8: Mehrlagiges Perzeptron

Im Folgenden werden nur solche Netzwerke mit einem einzelnen Ausgang, also nur einem Neuron in der Ausgangslage betrachtet.

Ein solches Netz stellt eine Funktion von den Eingangswerten auf den Ausgangswert dar. Durch Verändern der Gewichte in den einzelnen Neuronen kann die dargestellte Funktion verändert werden. Es kann sogar gezeigt werden, daß schon durch ein dreilagiges Netz jede stetige Funktion auf einem kompakten Bereich bezüglich der Supremums–Norm beliebig gut approximiert werden kann [18].

Dies allein nützt jedoch wenig, da dies weder darüber, wieviele Neuronen dazu benötigt werden, noch darüber, wie die Gewichte zu setzen sind, etwas aussagt. Es sind jedoch viele Methoden entwickelt oder auf dieses Problem übertragen worden, mit denen die Gewichte eines vorgegebenen Netzes so verändert werden können, daß eine durch Stützstellen vorgegebene unbekannte Funktion im allgemeinen gut approximiert werden kann. Dieses Verändern der Gewichte wird in der Terminologie der neuronalen Netze *Training* des Netzes genannt, die hierzu verwendeten Stützstellen der Funktion *Trainingsbeispiele*. Die Wahl der Anzahl der verwendeten Neuronen bleibt jedoch Plausibilitätsbetrachtungen und Ausprobieren vorbehalten.

2.4.2 Das Training eines Mehrlagigen Perzeptron

Die am häufigsten verwendete Methode zum Training eines Netzes ist ein Gradientenabstiegsverfahren, das in der Literatur meist als *Backpropagation* bezeichnet wird [18]. Die Gesamtfunktion eines bekannten Netzes läßt sich explizit aufschreiben: Für das j^{te} Neuron in der i^{ten} Lage des Netzes ist der Ausgang A_{ij}

$$A_{ij} = f\left(\sum_{k=0}^{n_{i-1}} w_{ijk} \cdot A_{(i-1)k}\right),$$

wobei n_i die Anzahl der Neuronen in der i^{ten} Lage und w_{ijk} das Gewicht des k^{ten} Eingangs ist. Aus diesen Teilfunktionen läßt sich die Gesamtfunktion $N(\mathbf{x}) = y$ zusammensetzen. Für eine gegebene Stützstelle ($\mathbf{x_t}$, y_t) der zu approximierenden Funktion ist der Fehler der Netzfunktion $F = \left(N(\mathbf{x}_t) - y_t\right)^2$. Diese Fehlerfunktion wird nun nach allen Gewichten w_{ijk} abgeleitet und diese werden in Richtung des kleineren Fehlers verändert. Hierzu wird der Gradient mit einem Faktor (dem sogenannten *Lernfaktor*) multipliziert und von den Gewichten subtrahiert.

Von diesem Grundprinzip gibt es viele verschiedene Variationen, die eine schnellere Konvergenz bewirken und/oder ein Festlaufen in lokalen Minima verhindern sollen, z.B.:

- Die Gewichte können nach der Berechnung des Gradienten für eine Stützstelle verändert werden (bei *Backpropagation* üblich) oder erst wenn dieser für viele Stützpunkte berechnet wurde (*Batch–Backpropagation*);

- Der Lernfaktor kann fest oder veränderlich, evtl. sogar für jedes Gewicht verschieden sein (*SuperSAB*) [19];

- Oft wird noch ein „Trägheitsterm“ eingeführt, für den es auch wieder verschiedene Möglichkeiten gibt [20];

- Einige Verfahren verwenden auch Ableitungen höherer Ordnung und die Annahme einer lokal annähernd quadratischen Fehlerfunktion (*Quickprop*) [21];

Welche dieser Variationen im Einzelfall das beste Ergebnis liefert, hängt von der zu approximierenden Funktion bzw. deren Stützstellen, der Geometrie des Netzes und der Initialisierung der Gewichte ab und kann im allgemeinen nur durch Ausprobieren festgestellt werden.

Wird dieses Verfahren sehr oft iteriert, so kommt es häufig vor, daß die gesuchte Funktion zwar auf den Trainingsdaten immer besser approximiert wird, das Verhalten zwischen diesen Stützstellen jedoch sehr stark schwankt und von der gesuchten Funktion abweicht. Daher wird als Abbruchkriterium meistens das Verhalten des Netzes auf bekannten Stützstellen der gesuchten Funktion verwandt, die *nicht* als Trainingsdaten verwendet werden. Auf diesen sogenannten *Testdaten* wird der Fehler zu Beginn des Trainings zunächst kleiner, steigt dann aber oft ab einem bestimmten Zeitpunkt bei weiterer Iteration des Verfahrens wieder an. Das Training sollte abgebrochen werden, bevor dieser Punkt erreicht ist.

Wenn eine unbekannte Funktion mit einem solchen Netz approximiert werden soll, sind oft sehr viele Stützstellen notwendig. Gerade bei Problemen der Meßdatenverarbeitung und Klassifikation, bei denen die Dimension der Eingangswerte oft recht hoch ist (z.B. die Pixel eines Bildes), sind oft etliche tausend Stützstellen notwendig um das gewünschte Verhalten zu erlangen. Über das Verhalten eines Netzes für einen Eingangsvektor, der außerhalb des durch die Stützstellen abgedeckten Bereiches liegt, kann nichts vorhergesagt werden.

Eine wichtige Rolle bei der Behandlung von gemessenen Größen mit neuronalen Netzen spielt die Vorverarbeitung der Eingangsdaten, auch *Codierung* derselben genannt. Oft kann die gesuchte Funktion in mehrere Schritte zerlegt werden, von denen einer oder mehrere explizit berechnet werden können. Die Schritte, welche auf die Eingangsdaten vor dem Einsatz des Netzes angewandt werden, stellen dann die Codierung dar. Es ist im allgemeinen sinnvoll, ein neuronales Netz nur für diejenigen Teilfunktionen einzusetzen, die nicht oder nur sehr umständlich auf konventionelle Weise berechnet werden können.

2.4.3 Die Anwendung auf Ladungsaustauschspektren

2.4.3.1 Vorbereitung der Meßdaten

Bei dem in dieser Arbeit behandelten Problem sollte nun eine Funktion realisiert werden, die ein gemessenes Ladungsaustauschspektrum auf die Ionentemperatur abbildet. Dafür gilt es zunächst eine geeignete Codierung der Spektren zu finden.

Gemessene Ladungsaustauschspektren haben zunächst einmal ein Format, das für die hier gewünschte Auswertung mit neuronalen Netzen denkbar ungeeignet ist. Ein solches gemessenes Spektrum besteht aus einer Folge veränderlicher Länge von (λ,I)–Wertepaaren, wobei die λ–Werte im allgemeinen weder äquidistant noch streng monoton sind. Als erster Schritt der Vorverarbeitung wurde daher ein Programm geschrieben, welches die Wertepaare nach steigenden λ–Werten sortierte und daraus mittels linearer Interpolation ein Spektrum mit äquidistanten λ–Werten eines vorgegebenen Abstandes berechnete.

Für die Temperaturbestimmung aus einer bestimmten Linie eines Ladungsaustausch-spektrums ist das Entscheidende die spektrale Breite der Linie; die absolute spektrale Position ist hier unwichtig. Sind die Meßwerte also erst einmal so wie nach diesem ersten Schritt geordnet, so können die λ–Werte ignoriert werden. Damit die verbleibenden Intensitätswerte als Eingang eines neuronalen Netzes dienen können, muß deren Anzahl fest sein und mit der Anzahl der Eingangsneuronen des Netzes übereinstimmen. Der nächste Schritt der Codierung der Meßdaten bestand daher daraus, aus jedem Spektrum eine feste Anzahl von aufeinanderfolgenden Meßwerten auszuwählen. Diese Anzahl muß kleiner sein als die kleinste Anzahl von Meßpunkten in einem Spektrum, jedoch groß genug, um sicherzustellen, daß die betrachtete Linie ganz im ausgewählten Bereich liegt. Die hier getroffene Auswahl bestand darin, eine feste Anzahl von Meßwerten symmetrisch um den Schwerpunkt des Spektrums beizubehalten; dies korrigiert auch eine eventuelle Dopplerverschiebung der Linie, welche durch die Rotation des Plasmas auftreten kann. Für diese feste Anzahl wurde hier 200 gewählt.

Da die gemessene Temperatur nicht von der absoluten Amplitude der Meßwerte abhängen sollte, bestand der nächste Schritt aus einer Normierung der Spektren. Um den Einfluß von Rauschen dabei möglichst gering zu halten, wurde auf eine konstante Fläche unter den Spektren normiert. Die so vorbereiteten Werte wurden nun als Eingangswerte für ein neuronales Netz genommen.

2.4.3.2 Die Wahl der Netzgeometrie und das Training des Netzes

Die Wahl der besten Netzgeometrie für ein Problem, also der Anzahl der versteckten Lagen und der Anzahl der Neuronen in den versteckten Lagen, und das Training des Netzes sind unmittelbar miteinander verknüpft: Nur über das Verhalten während des Trainings kann ein Urteil darüber abgegeben werden, ob eine bestimmte Geometrie für das jeweilige Problem besser geeignet ist als eine andere oder nicht.

Eine prinzipielle Schwierigkeit bei dem hier betrachteten Problem ist der Bedarf an einer ausreichend großen Menge von Trainingsdaten. Aus den bisherigen Messungen an TEXTOR steht eine große Menge an Spektren zur Verfügung; es liegen jedoch nur für sehr wenige von diesen (einige Hundert) Angaben für die zugehörige Ionentemperatur vor. Auch war die Methode, mit der die Temperatur bei diesen Spektren bestimmt worden war (Ausmessen der Halbwertsbreite der Spektrallinie mit einem Lineal auf einem Ausdruck des Spektrums), sicherlich anfällig für Fehler und kaum geeignet, eine ausreichende Anzahl an Trainingsdaten zur Verfügung zu stellen.

Daher wurde das in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Verfahren zum Anpassen von simulierten Spektren an gemessene verwendet, um zu einigen Tausend Spektren eine Temperaturangabe zu erhalten. Dadurch ist natürlich eine Grenze dieser Methode schon vorgegeben: Da sämtliche Trainingsdaten für das Netz mit obigem Verfahren berechnet wurden, kann das Netz im besten Fall dessen Ergebnisse reproduzieren. Natürlich kann es im Einzelfall vorkommen, daß das konventionelle Verfahren bei einzelnen Spektren „Ausreißer“ produziert die vom Neuronalen–Netz–Ansatz nicht erzeugt werden. Es gibt jedoch keinen Grund anzunehmen, daß der Neuronale–Netz–Ansatz systematisch „bessere“ Werte liefert als das Verfahren, mit dem die Trainingsdaten erzeugt wurden.

Für das Training wurden statt der tatsächlich errechneten Temperaturen die Halbwertsbreiten der berechneten Spektren verwendet. Werden diese wie bei den beiden vorhergegangenen Verfahren mittels einer Korrekturtabelle umgerechnet, so lassen sich damit – je nach Auflösung der Tabelle – nahezu exakt die „richtigen“ Temperaturwerte errechnen. Dies scheint zunächst umständlich, hat aber einige wichtige Vorteile: Ändern sich die Eingangsvoraussetzungen, so muß in vielen Fällen nicht das Netz neu trainiert werden, es reicht dann aus, die Korrekturtabelle neu zu berechnen. Bei einer Änderung der instrumentellen Breite brauchen so nicht einmal die Tabellen neu berechnet zu werden, es reicht aus, die geänderte Breite in die Berechnung der Temperatur aus der Halbwertsbreite einzusetzen. Ferner zeigte sich beim Anwenden des Netzes auf Testdaten, daß die berechneten Ergebnisse auf diese Art deutlich dichter an den „Sollwerten“ lagen als bei einem Netz, welches mit den ermittelten Temperaturen trainiert wurde.

Für die Durchführung des Trainings wurde der Netzwerksimulator SNNS (Stuttgart Neural Net Simulator) benutzt. Dieser bietet umfangreiche Möglichkeiten zur Konstruktion und Manipulation von neuronalen Netzen sowie eine Vielzahl von Möglichkeiten zum Training dieser Netze. Ferner besteht die Möglichkeit, für ein Netzwerk Quellcode in der

Programmiersprache C erzeugen zu lassen, so daß ein in dem Simulator erzeugtes und trainiertes Netz effektiv in eigene Programme eingebunden werden kann[22].

Bei der Durchführung des Trainings wurden 1200 Spektren für das Training und 123 als Testdatensatz benutzt. Vorgegeben waren durch die Daten 200 Neuronen in der Eingangs– und ein Neuron in der Ausgangslage. Um den möglichen Ausgangswertebereich nicht von vornherein einzuschränken, wurde die Übertragungsfunktion des Ausgangsneurons nicht als Sigmoid-Funktion, sondern als Identität gewählt. Trainiert wurden Netze mit ein bis drei versteckten Lagen und mit 3 bis 50 Neuronen in den versteckten Lagen. Die Gewichte wurden vor jedem Trainingslauf auf zufällige Werte im Bereich]–1,1[initialisiert, wozu der Zufallszahlengenerator von SNNS verwendet wurde.

Es zeigte sich, daß das Verhalten des Netzes bei verschiedenen Trainingsläufen erhebliche Unterschiede aufwies. So schwankte der mittlere Fehler auf dem Testdatensatz bei Abbruch des Trainings nach gleicher Anzahl von Iterationen oft um den Faktor 5 und mehr. Dies kann sowohl an der unterschiedlichen Initialisierung der Gewichte als auch an der unterschiedlichen Reihenfolge der Aktualisierung der Gewichte liegen. Es gibt keinen Grund anzunehmen, daß bei allen betrachteten Netzwerkgeometrien das beste mögliche Training durchgeführt wurde (oder daß das Ergebnis nahe an dem besten lag). Daher kann auch nicht mit Sicherheit gesagt werden, daß die letztendlich gewählte Netzwerkgeometrie ein Optimum darstellt. Dies stellt jedoch eine prinzipielle Schwierigkeit bei neuronalen Netzen dar und kann nicht vermieden werden. Um die Auswirkung dieser Schwäche so gering wie möglich zu halten, wurden für alle Netzwerkgeometrien, die in nähere Betrachtung gezogen wurden, mehrere Trainingsläufe (einige 10) durchgeführt, bevor deren Ergebnisse miteinander verglichen wurden.

Letztendlich wurde ein Netzwerk mit zwei versteckten Lagen und acht bzw. vier Neuronen in den versteckten Lagen zum Vergleich mit den anderen Verfahren ausgewählt. Es zeigte sich, daß bei dieser Netzwerkgeometrie nach etwa 1000 Trainingszyklen der Fehler auf dem Testdatensatz zu steigen begann. Um ein Netz mit möglichst geringem Fehler zu erhalten, wurde daher ein solches Netzwerk zwanzig mal initialisiert und jeweils für 1000 Zyklen trainiert. Von diesen 20 trainierten Netzen wurde dasjenige mit dem geringsten Fehler auf den Testdaten ausgewählt.

2.5 Vergleich der verschiedenen Verfahren

Bei dem Vergleich der verschiedenen Verfahren gilt es drei Dinge zu betrachten:

- Die Genauigkeit der errechneten Ergebnisse,
- Der rechnerische Aufwand, der für das jeweilige Verfahren notwendig ist,
- Das Verhalten bei „schlechten“ oder unvorhergesehenen Meßwerten.

2.5.1 Vergleich des rechnerischen Aufwandes

Der Vergleich des rechnerische Aufwandes muß in zwei Punkte unterteilt werden: Die Rechenzeit, welche die „betriebsfertigen“ Verfahren zur Auswertung eines Spektrums benötigen, und der Aufwand, der notwendig ist, um die Verfahren in diesen „betriebsfertigen“ Zustand zu bekommen oder diesen wieder herzustellen, wenn die Eingangsbedingungen sich geändert haben.

Die Vorbereitungen des Verfahrens sind bei dem Anpassen von simulierten Spektren minimal. Dort müssen lediglich die für die Berechnung der simulierten Spektren notwendigen Parameter (Masse der Ionen, Blickwinkel, etc.) eingestellt werden. Dementsprechend ist auch kaum zusätzlicher Aufwand notwendig, wenn sich an den vorgegebenen Bedingungen etwas ändert.

Bei den anderen drei Verfahren muß zunächst die Tabelle berechnet werden, mit der aus der „Scheintemperatur“ die tatsächliche Temperatur ermittelt wird. Dies bedeutet jeweils einen Rechenaufwand von einigen Stunden, abhängig von der Auflösung der Tabelle. Diese Tabelle muß jedes Mal neu berechnet werden, wenn sich an den Parametern, welche neben der Temperatur und dem Magnetfeld Einfluß auf die simulierten Spektren haben, etwas ändert.

Bei der Temperaturbestimmung mit dem neuronalen Netz kommt noch das Training hinzu und für diesen Zweck die Erstellung der Trainingsdaten. Da sehr viele Trainingsdaten benötigt werden, nimmt alleine die Berechnung der Trainingsdaten etliche Stunden Rechenzeit in Anspruch. Das Training selbst erfordert noch einmal einige Stunden.

Zum Vergleich der Rechenzeiten wurde eine Gruppe von 1200 Spektren mit jedem der Verfahren ausgewertet. Die hier angegebenen Zeiten stellen den Mittelwert der dabei pro Spektrum benötigten Zeit dar. Diese Zeiten sind eher als Anhaltswert denn als genaue Zeitangabe zu verstehen, da sie je nach vorgegebenen Bedingungen noch erheblich schwanken können. So wird z.B. für die Gradientenabstiegsverfahren die Rechenzeit in erheblichem Maße durch die Wahl der Startwerte beeinflußt. Dabei kann sich für eine bestimmte Gruppe von Spektren ein Verfahren zur Wahl dieser Startwerte als besonders günstig erweisen, welches für andere Spektren wiederum zu starken „Ausreißern“ führt.

Ebenso verhält es sich mit den Schrittweiten und deren dynamischer Veränderung. Für sämtliche dieser Parameter wurden Werte gewählt, die sich durch viele Versuche im Verlaufe dieser Arbeit als günstig für den Mittelwert der benötigten Rechenzeit erwiesen.

Bei allen Verfahren wurde die Zeit für die gesamte Auswertung, also einschließlich aller Vorbereitungen der Meßdaten und ähnlichem gemessen. Die Zeit für das Einlesen der Spektren von Speichermedien und für das Abspeichern der Ergebnisse wurde nicht mit gemessen. Alle Zeiten wurden auf einer DEC Alphastation 300 bestimmt. Es ergaben sich folgende Durchschnittszeiten für die Auswertung eines Spektrums:

Verfahren	Zeit	Relative Zeit
Anpassen von Gaußglocken	27 ms	8
Anpassen von simulierten Spektren	2120 ms	640
Ad–hoc Verfahren	3,31 ms	1
Neuronales Netz	3,26 ms	1

Die Auswertung mit neuronalen Netzen und das Ad–hoc–Verfahren sind also etwa gleich schnell, das Anpassen von Gaußfunktionen ist um eine und das Anpassen von simulierten Spektren um drei Größenordnungen langsamer. Die lange Rechenzeit bei dem Anpassen von simulierten Spektren resultiert daraus, daß die Zeeman-Aufspaltung zu sehr vielen Komponenten der Spektren führt – im Fall von C^{6+} knapp 1000. Für jeden Punkt des Spektrums müssen also etwa 1000 Exponentialfunktionen berechnet werden.

2.5.2 Vergleich der Ergebnisse

Für den Vergleich der errechneten Ergebnisse wäre es wünschenswert, wenn für die betrachteten Messungen zuverlässige Referenzwerte vorliegen würden. Da dies jedoch bei den betrachteten Messungen nicht der Fall ist, können nur die Verfahren untereinander verglichen werden. Dabei diente das Verfahren, welches simulierte Spektren an die Messungen anpaßt, als Referenz, da von diesem die besten Ergebnisse erwartet werden können und weil es zur Erzeugung der Trainingsdaten für das neuronale Netz diente.

Für den Vergleich der Ergebnisse wurden alle vier Verfahren auf eine Gruppe von 123 Spektren angewandt, die nicht im Trainingsdatensatz für das neuronale Netz waren. Diese Spektren wurden zufällig aus den etwa 1300 vorliegenden Spektren ausgewählt. Bei den folgenden Diagrammen wurde auf der *x*–Achse die Temperatur aufgetragen, welche durch das Anpassen von simulierten Spektren errechnet wurde. Auf der *y*–Achse wurde die mit dem jeweils angegebenen Verfahren errechnete Temperatur aufgetragen.

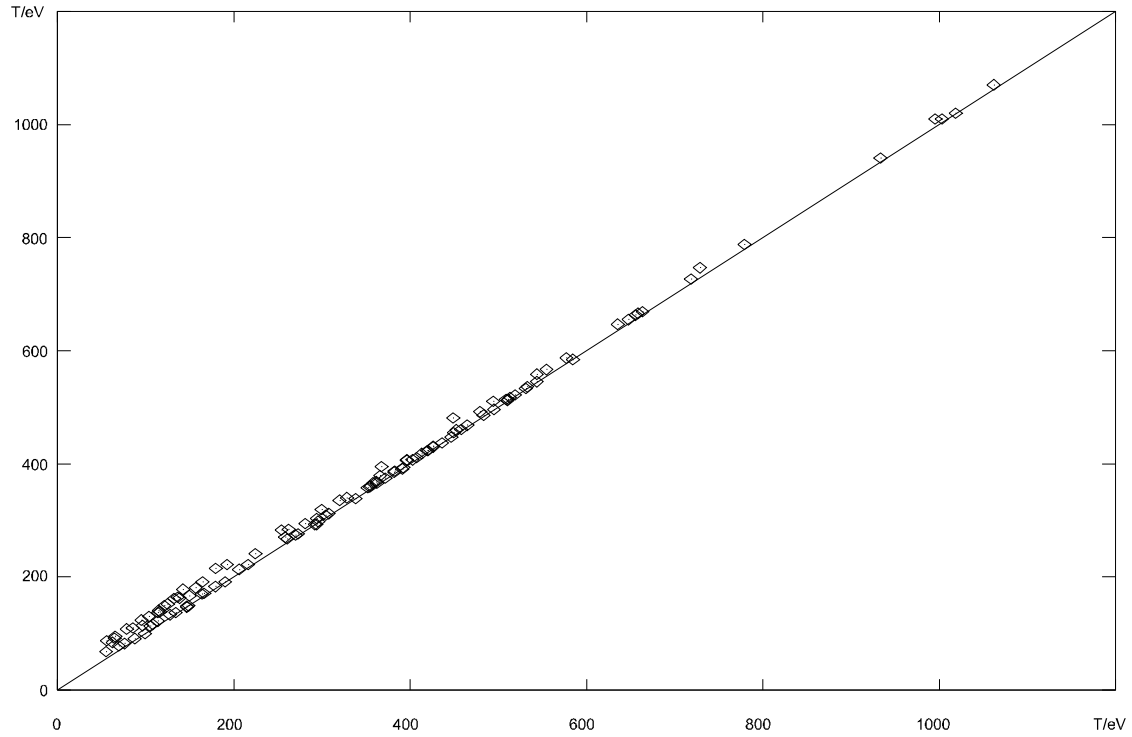

Abbildung 9: Ergebnisse beim Anpassen von Gaußfunktionen. Korrelationskoeffizient: 0,999

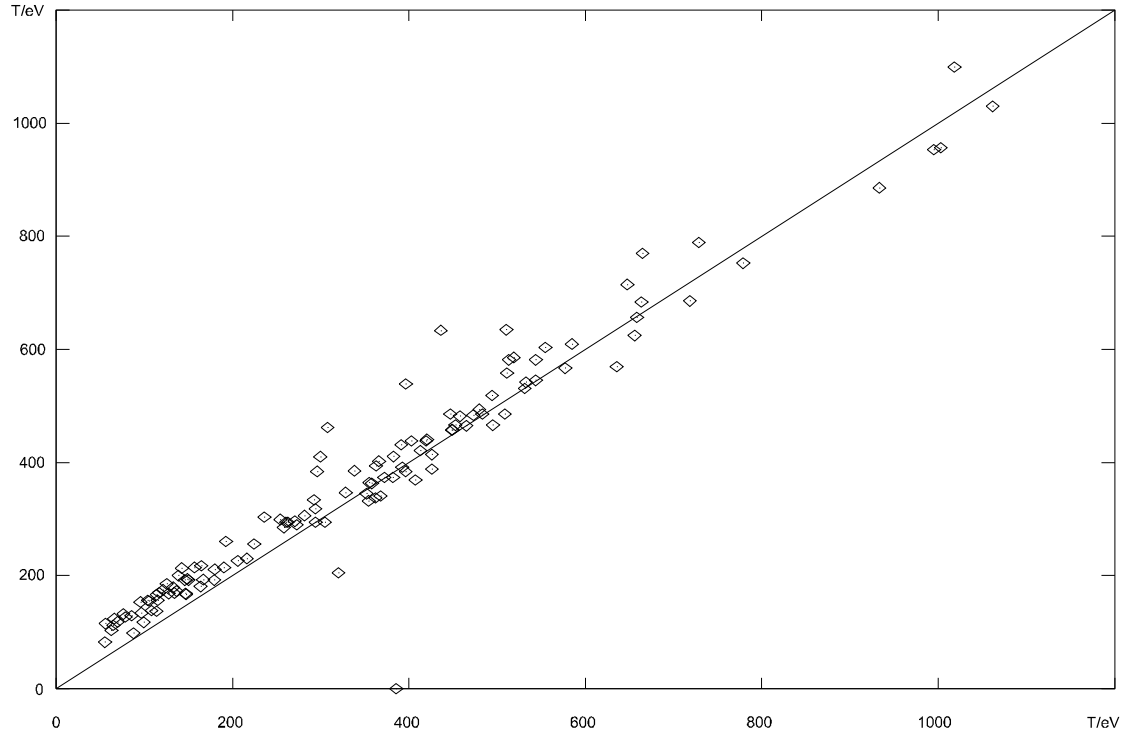

Abbildung 10: Ergebnisse des Ad–hoc–Verfahrens. Korrelationskoeffizient: 0,983

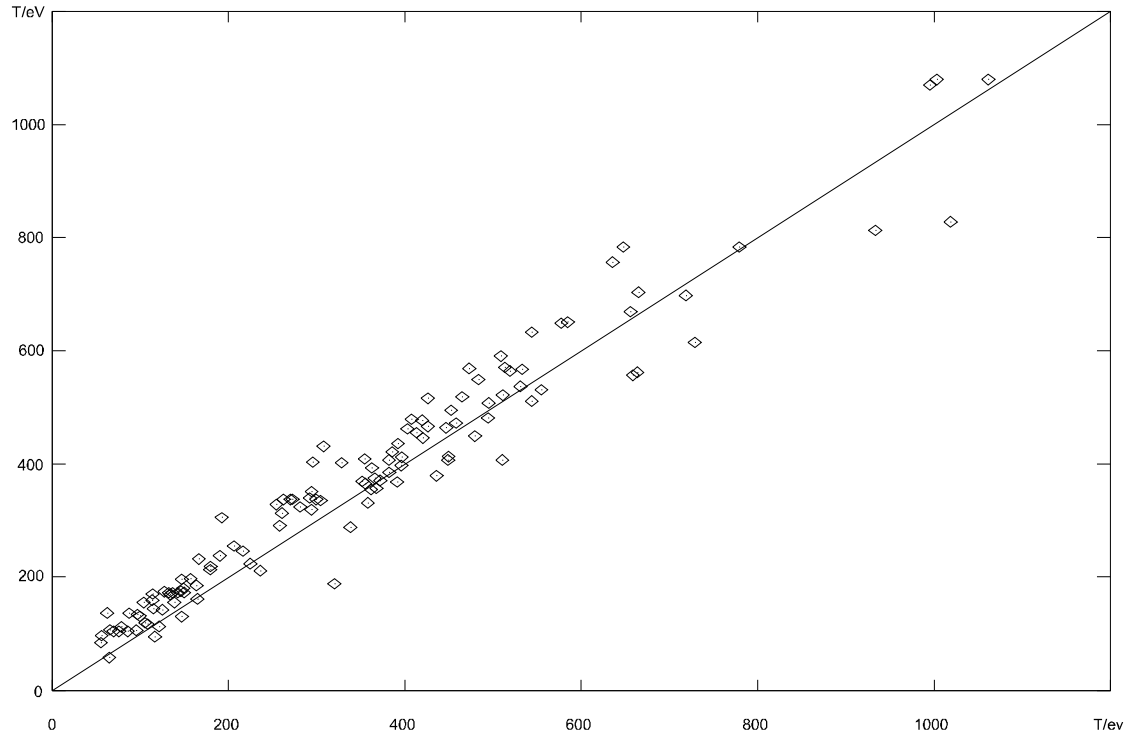

Abbildung 11: Ergebnisse des neuronalen Netzes. Korrelationskoeffizient: 0,973

Es zeigt sich zunächst, daß das Anpassen von Gaußfunktionen nahezu die selben Ergebnisse liefert wie das Anpassen von simulierten Spektren. Die Ergebnisse des Ad–hoc–Verfahrens und des neuronalen Netzes liegen vergleichbar nah an den erwarteten Werten.

2.5.3 Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten

„Unerwartete Eingangsdaten“ sind bei der Auswertung von Spektren in erster Linie Meßdaten, deren Verlauf nicht die Form eines Spektrums hat. In vielen Fällen können solche Messungen durch Plausibilitätsbetrachtungen – etwa durch die maximale Amplitude der Meßwerte – vor der Auswertung erkannt oder durch Überwachung der Meßapparatur vermieden werden. Da dies gleichermaßen für alle Verfahren gilt, wurden solche Überlegungen hier jedoch nicht weiter verfolgt.

Der Extremfall von unerwarteten Eingangsdaten ist sicherlich, wenn das Eingangssignal nur aus Rauschen besteht. In diesem Fall spielen die berechneten „Temperaturen“ keine Rolle, hier interessiert nur, ob das Verfahren ordentlich terminiert. Da der rechnerische Ablauf des neuronalen Netzes nicht von den Eingangsdaten abhängt, läuft die Rechnung bei diesem ebenso ab wie bei „vernünftigen“ Werten und liefert ein aussagelosen Wert für die Temperatur. Das Ad–hoc–Verfahren durchläuft eine feste maximale Anzahl von Iterationen und führt keine Operationen durch, die innerhalb von einigen Iterationen zu einem Überlauf führen können. Daher führt auch bei diesem Verfahren ein Rauschen als Eingangssignal nicht zu einem problematischen Verhalten.

Anders sieht dies bei den Gradientenabstiegsverfahren aus: Bei diesen ist die Abbruchbedingung von den Daten abhängig. Daher führen solche Eingangsdaten im allgemeinen Fall dazu, daß das Verfahren gar nicht oder erst nach sehr vielen Iterationen terminiert. Auch können die berechneten Größen extrem große oder kleine Werte annehmen, was im praktischen Fall dazu führt, daß das Programm wegen eines numerischen Überlaufes unplanmäßig terminiert.

Auch wenn durch geschickte Vorüberlegungen solche Daten ausgeschlossen werden können, bleibt die Frage, wie die Verfahren sich bei der Temperaturbestimmung aus stark verrauschten Spektren verhalten. Um dies zu untersuchen wurde ein gemessenes Spektrum mit geringem Rauschanteil ausgewählt, für das alle Verfahren sehr dicht beieinander liegende Werte lieferten (alle wichen weniger als 0,24% von dem Mittelwert ab). Aus diesem Spektrum wurden Testspektren erzeugt, indem ein gleichverteiltes Rauschen auf die Daten addiert wurde. Die maximale Amplitude des Rauschens lag dabei beim 0,1– bis 1,5–fachen der maximalen Amplitude des gemessenen Spektrums. Auf die so erzeugten Spektren wurden alle Verfahren angewandt, um die Temperatur zu bestimmen. Diese Untersuchung wurde für mehrere Spektren durchgeführt, wovon hier zwei Ergebnisse gezeigt seien:

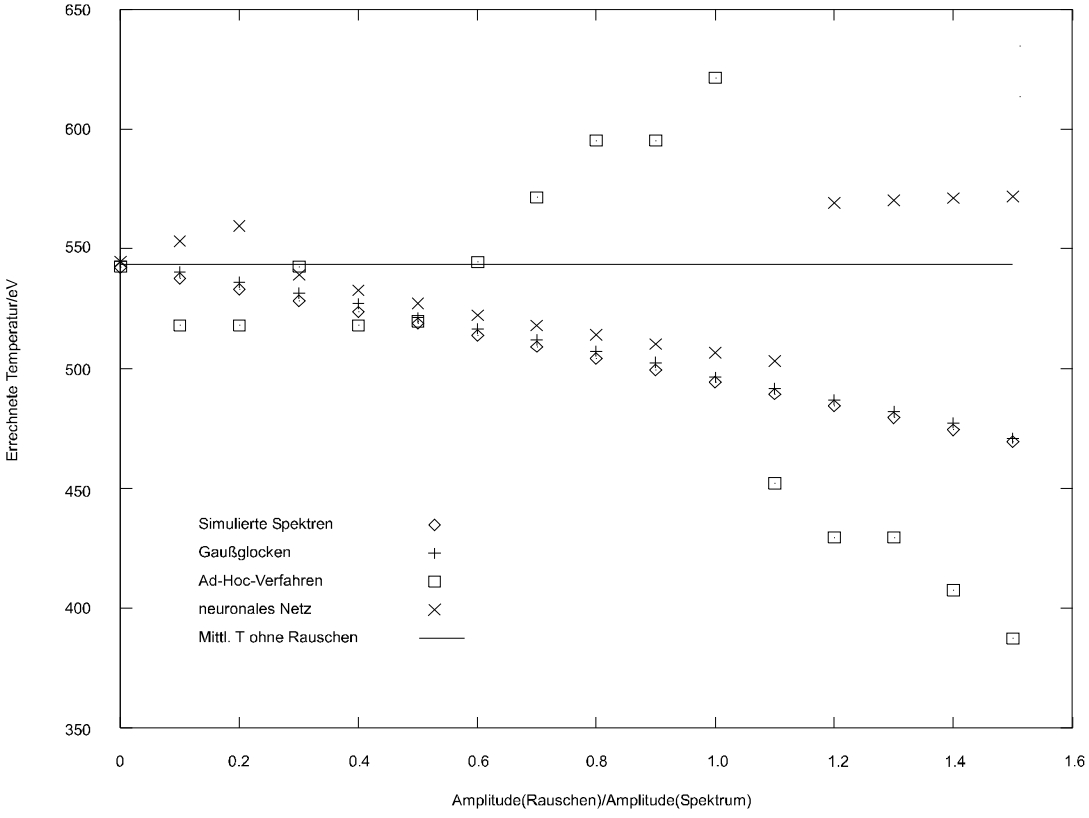

Abbildung 12: Errechnete Temperaturen vs. Rauschanteil

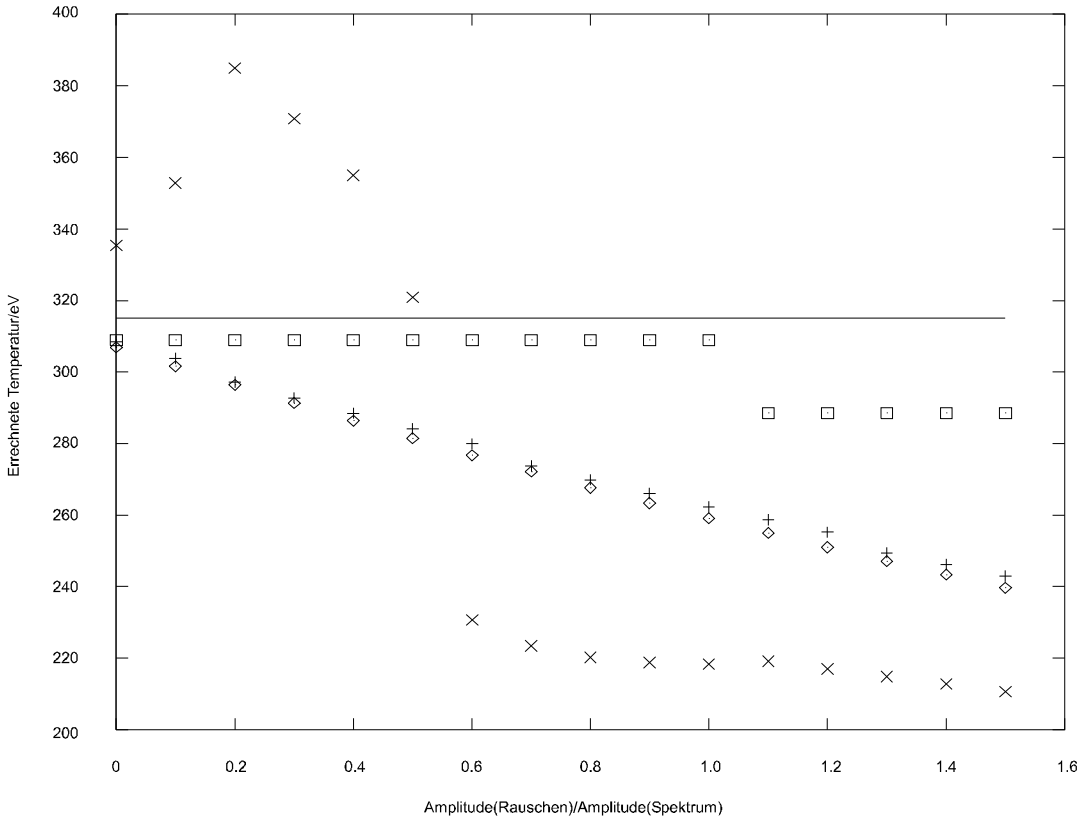

Abbildung 13: Errechnete Temperaturen vs. Rauschanteil

Bei allen so durchgeführten Versuchen zeigte sich folgendes: Die Temperaturen, die mit den Gradientenabstiegsverfahren errechnet wurden, entfernten sich mit zunehmendem Rauschanteil gleichmäßig weiter von der ursprünglich errechneten Temperatur, während die mit den anderen beiden Verfahren errechneten Temperaturen um den ursprünglichen Wert sprangen. Welches der Verfahren dabei den besten Wert liefert, hängt von den jeweiligen Daten und dem Rauschen ab und kann nicht vorhergesagt werden. Alle Verfahren liefern selbst bei einem extrem verrauschten Signal noch Werte, die auch in ungünstigen Fällen nicht mehr als etwa 30% von dem ursprünglich errechneten Wert abweichen.

2.6 Bewertung der Ergebnisse

Jedes der hier vorgestellten Verfahren hat Vorteile und Nachteile; es hängt von dem jeweiligen Einsatz ab, welches Verfahren sich als das günstigste erweist. Die Vor- und Nachteile sind im Einzelnen:

Anpassen von simulierten Spektren:

\+
- „Optimale“ Ergebnisse bei nicht allzu verrauschten Eingangsdaten
- Die Berechnung ist unabhängig von Anzahl der Eingangswerte und ihrer Wellenlänge λ
- Hohe Flexibilität bei Änderung der physikalischen Voraussetzungen

–
- Hoher Rechenaufwand / lange Rechenzeit
- Rechenzeit hängt von Eingangsdaten ab
- Unvorhersehbares Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten

Anpassen von Gaußglocken:

\+
- Für die meisten Anwendungen schnell genug
- Gute Genauigkeit der Ergebnisse bei nicht allzu verrauschten Eingangsdaten
- Die Berechnung ist unabhängig von Anzahl der Eingangswerte und ihrer Wellenlänge λ

–
- Unvorhersehbares Verhalten bei unerwarteten Eingangsdaten
- Rechenzeit hängt von Eingangsdaten ab
- Benötigt Korrekturtabelle

Ad–hoc–Verfahren:

\+
- Sehr schnell
- Die Berechnung ist unabhängig von Anzahl der Eingangswerte und ihrer Wellenlänge λ
- Berechnung ist unabhängig von Anzahl und Lage (λ) der Eingangswerte
- Sicheres Verhalten bei unvorhergesehenen Eingangswerten

–
- Relativ geringe Genauigkeit der Ergebnisse
- Rechenzeit hängt von Eingangsdaten ab
- Benötigt Korrekturtabelle

Neuronales Netz

\+
- Sehr schnell
- Rechenzeit ist unabhängig von Eingangsdaten
- Sicheres Verhalten bei unvorhergesehenen Eingangswerten

–
- Relativ geringe Genauigkeit der Ergebnisse
- Benötigt (einmaliges) sehr zeitaufwendiges Training
- Benötigt eine Mindestanzahl von Eingangswerten. Bei unvollständigen Eingangsdaten ist das Ergebnis nicht vorhersehbar.

Berücksichtigt man diese Vor- und Nachteile, so scheint der Einsatz von neuronalen Netzen an dieser Stelle nur dann sinnvoll, wenn sehr schnell Werte für die Temperatur benötigt werden, deren Genauigkeit jedoch nicht entscheidend ist. Eine mögliche Anwendung scheint z.B. die Echtzeitbestimmung der Temperatur während der Messung. Hier kommen die anderen Verfahren nur bedingt in Frage, da deren Zeitverhalten nicht so zuverlässig wie das eines neuronalen Netzes ist.

Dieses Beispiel der Temperaturbestimmung aus Ladungsaustauschspektren ist ein gutes Beispiel für eine prinzipielle Einschränkung bei der Auswertung von Meßdaten mit neuronalen Netzen: Um ein solches Problem mit einem neuronalen Netz zu bearbeiten, müssen große Mengen von Eingangs–Ausgangs–Wertepaaren vorliegen, mit denen das Netz trainiert wird. Um diese zu erhalten, muß jedoch bereits ein Verfahren existieren, das die gewünschte Größe aus den Meßdaten berechnen kann. Das neuronale Netz kann dann im besten Fall dieses Verfahren nachahmen. Vorteile kann eine neuronales Netz nur in zwei Punkten bieten: der Rechengeschwindigkeit und der numerischen Stabilität bei unerwarteten Eingangsdaten. Es bleibt jedoch zu bemerken, daß diese Eigenschaften von dem hier vorgestellten Ad–hoc–Verfahren bei einem sehr viel geringeren Aufwand ebenfalls erreicht wurden. Lediglich bei der Rechenzeit kann in wenigen Fällen das Netz Vorteile bieten, da diese nicht von den Eingangsdaten abhängt. Es fällt jedoch schwer, eine Anwendung zu finden, bei der dieser Vorteil zum Tragen kommt.

3 Tomographische Rekonstruktion aus Bolometriedaten

3.1 Bolometrie an TEXTOR

Bolometrie (von dem griechischen *Bole*, Strahl) ist eine Diagnostik, mit der Strahlungsleistung gemessen werden soll. Dies geschieht bei der an TEXTOR eingesetzten Meßeinrichtung mit Hilfe von Metallschichtdetektoren. Bei diesen absorbiert eine 4µm dicke Goldschicht Plasmastrahlung in einem Wellenlängenbereich von 2Å bis 2000Å. In diesem Wellenlängenbereich beträgt die Absorption der Goldschicht 80–100%. Die daraus folgende Erwärmung des Absorbers wird durch die Widerstandsänderung einer schmalen Goldleiterbahn auf der Rückseite des Detektors bestimmt, welche mit einer Wheatstone´schen Brückenschaltung gemessen wird.

An TEXTOR werden zwei verschiedene Typen von Detektoren eingesetzt, die sich jedoch nur in ihrer technischen Ausführung unterscheiden. Eine genaue Beschreibung dieser Detektoren sowie der zu ihnen gehörigen Meßelektronik findet sich in [23]; Vergleiche mit anderen Bolometerdetektortypen sind in [24][25][26] ausgeführt.

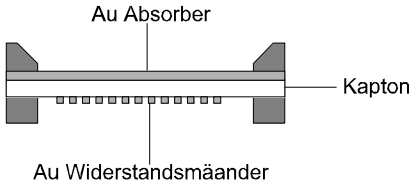

Abbildung 14: Schematische Darstellung eines Bolometer-Sensors

Ein solcher Detektor absorbiert Strahlung nur aus einem bestimmten Raumwinkel. Dieser wird durch die Anordnung der Detektoren und durch Blenden, die zwischen den Detektoren und dem Plasmagefäß eingesetzt werden können, bestimmt. Bei den an TEXTOR eingesetzten Detektoren begrenzen rechteckige Blenden die Raumwinkel auf $7{,}5 \cdot 10^{-4}$, $5{,}5 \cdot 10^{-3}$ und $5{,}6 \cdot 10^{-3}$ *ster*.

Die Bolometrie an TEXTOR benutzt 26 Detektoren, welche in 3 Kameras zusammengefaßt sind. Innerhalb jeder Kamera sind die Detektoren fächerförmig in einer Ebene angeordnet. Alle 3 Kameras sind an der gleichen toroidalen Position an TEXTOR in einer Ebene senkrecht zum Gefäß angebracht. Die poloidale Anordnung und die Ausrichtung der Kameras ist durch mechanische Randbedingungen (andere Diagnostiken, Vertikalfeldspulen) vorgegeben. Dadurch liegt einer der Detektoren so weit außen, daß im allgemeinen keine Strahlung aus dem Plasma auf diesen trifft, weshalb praktisch nur 25 Detektoren zur Verfügung stehen.

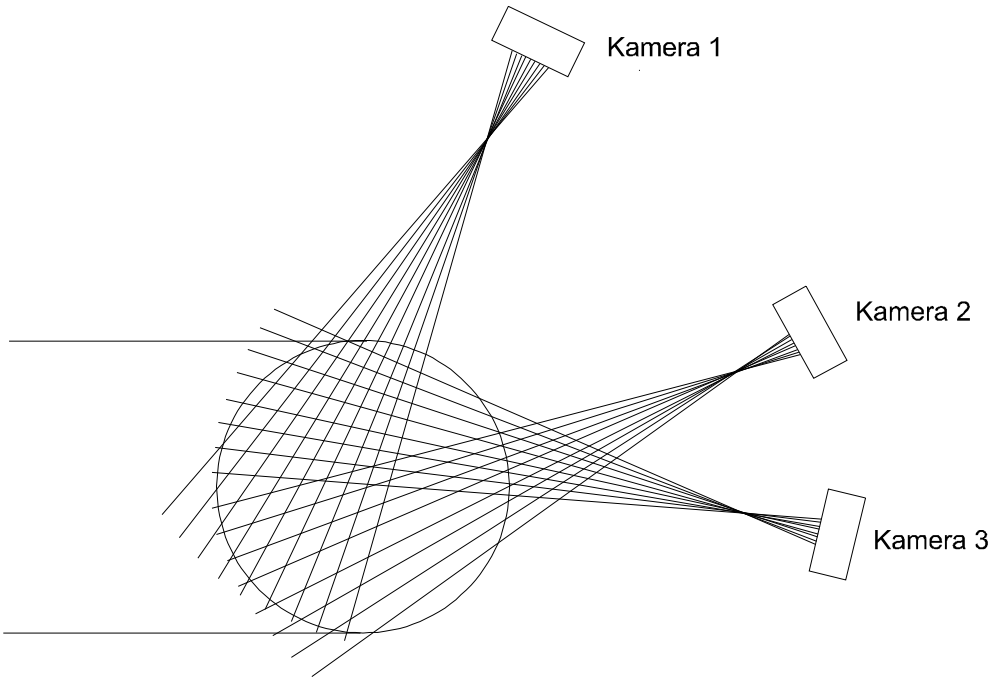

Abbildung 15: Lage der Detektoren

3.2 Problemstellung

Für einige Anwendungen ist es wünschenswert, die räumliche Verteilung der Leistungsabstrahlung zu kennen. Da die Abstrahlungsverteilung in den meisten Fällen toroidal symmetrisch ist, kann dies durch Kenntnis der Verteilung auf einem Schnitt an einer toroidalen Position erreicht werden. Daher wurde an TEXTOR bereits versucht, aus den Meßdaten der Bolometrie eine tomographische Rekonstruktion der Abstrahlung zu errechnen.

Auf Grund der geringen Anzahl von Sichtstrahlen sind die in der Tomographie üblichen Verfahren hier nur unter Annahme von sehr starken Randbedingungen anwendbar. Diese basieren zumeist auf Inversion der Radon–Transformation

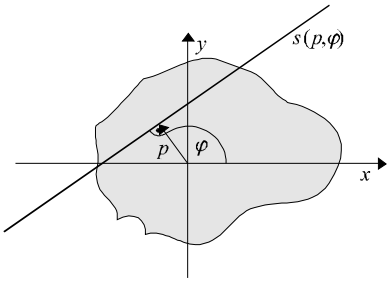

Abbildung 16: Prinzip der Radontransformation

$$f(p,\vartheta) = \int_{s(p,\vartheta)} l(x,y)\,ds\,,$$

wobei $l(x,y)$ die zu rekonstruierende Verteilung ist. Unter der zumeist gemachten Annahme, daß die Meßwerte näherungsweise Linienintegralen entsprechen, stellen diese dabei direkt die $f(p,\varphi)$ dar. Diese Transformation ist umkehrbar, wozu allerdings die Kenntnis von $f(p,\varphi)$ für alle (p,φ) notwendig ist. Eines der zentralen Probleme bei der Tomographie ist daher die Extrapolation von den gemessenen Werten auf die unbekannten $f(p,\varphi)$. Gerade bei wenigen Meßwerten ist dies nur unter sehr starken a–priori Annahmen möglich.

Das bisher an dieser Stelle verwendete Verfahren benutzte als eine dieser a–priori Annahmen, daß die Verteilung sich in poloidaler Richtung durch eine Fourierkomponente beschreiben läßt. Da jedoch vermutet wurde, daß in poloidaler Richtung mehrere Abstrahlungsmaxima auftreten können, wurde nach einem Verfahren gesucht, welches auch für diesen Fall eine brauchbare Rekonstruktion liefert.

Auch das hier entwickelte Verfahren kann tomographische Rekonstruktionen nur unter sehr starken a–priori Annahmen machen. Der Verzicht auf die Verwendung der inversen Radon–Transformation erlaubt es jedoch, diese Annahmen im geometrischen Raum (im Gegensatz zu dem transformierten) zu machen, wodurch sie direkt mit einer geometrischen Bedeutung versehen sind.

Bei dem hier vorgestellten sowie allen bisher benutzten Verfahren wird davon ausgegangen, daß die Abstrahlung an jedem Punkt des Plasmas isotrop erfolgt.

3.3 Mathematische Beschreibung der Messung

Betrachtet werden hier flächenhafte Verteilungen der Leistungsabstrahlung auf einem toroidalen Schnitt durch das Gefäß. Diese lassen sich durch Abbildungen $l:D\rightarrow\mathbb{R}_{0+}$ beschreiben, wobei der kreisförmige Definitionsbereich D dem Schnitt durch das Plasmagefäß entspricht. Im folgenden wird dieser Definitionsbereich mit der Einheitskreisscheibe K identifiziert.

Nicht alle Abbildungen von K nach $\mathbb{R}_{0+}$ stellen physikalisch sinnvolle Verteilungen dar. So sind sicherlich alle physikalisch möglichen Verteilungen stetig und sogar auf Grund der von 0 verschiedenen Diffusion der strahlenden Teilchen differenzierbar. Auf Grund der Physik gelten sicherlich noch weitere starke Einschränkungen für die möglichen Verteilungen. Im Folgenden bezeichne L die Menge aller physikalisch möglichen Verteilungen. Es ist also $l \in L \subset C\left(K, \mathbb{R}_{0+}\right)$.

Für die Messung stehen 25 Sensoren zur Verfügung, somit läßt die Messung sich beschreiben als $M: L \rightarrow W \subset \mathbb{R}_{0+}^{25}$, wobei $W = Bild(M)$ die Menge der physikalisch möglichen Messungen ist. Jeder Sensor mißt die Abstrahlung in einem durch eine rechteckige Blende vorgegebenen Bereich.

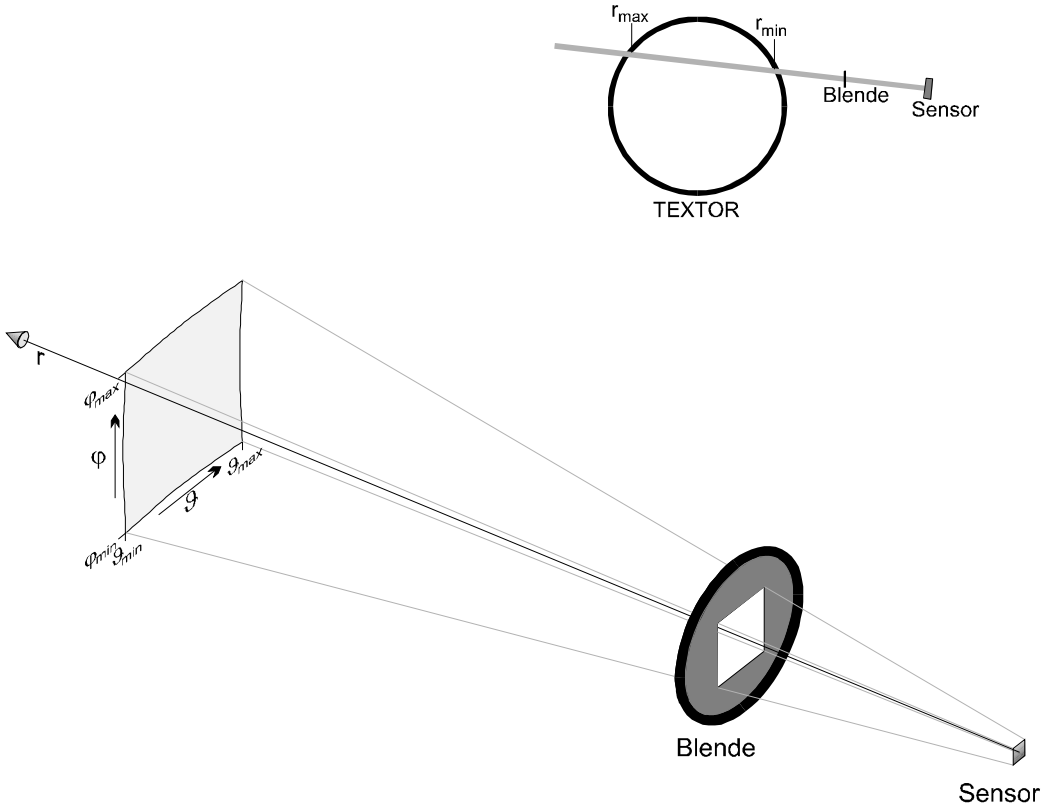

Abbildung 17: Schematische Darstellung der Meßanordnung

Wird die Fläche eines Sensors als sehr klein im Vergleich zu den übrigen Abmaßen des Systems angenommen, so läßt sich die Strahlungsleistung, die auf einen Sensor fällt, in guter Näherung[iv] durch

$$P_{\text{Sensor}} = \frac{A}{4\pi} \cdot \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} P_{rad}(r,\varphi,\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

beschreiben, wobei $P_{rad}(x,y,r)$ die Leistungsabstrahlung und A die Fläche des Sensors ist. Hierbei wurden sphärische Koordinaten mit dem Ursprung an der Position des Sensors verwendet (vgl. Abbildung 17). Da von einer toroidalen Symmetrie des Plasmas und somit auch der Abstrahlung ausgegangen wird, kann P_{rad} über ϑ als nahezu konstant angenommen werden, daher ist

$$\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} P_{rad}(r,\varphi,\vartheta)\, d\vartheta = r \cdot \alpha_{\vartheta} \cdot P_{rad}(r,\varphi)$$

mit dem ϑ–Öffnungswinkel $\alpha_{\vartheta} = \vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}$ und obiges Integral vereinfacht sich also zu

$$P_{\text{Sensor}} = \frac{A}{4\pi} \cdot \alpha_{\vartheta} \cdot \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} P_{rad}(y,r)\, d\varphi\, dr\ .$$

Oft wird auf Grund der recht kleinen Öffnungswinkel (wenige Grad) zudem angenommen, daß in dem betrachteten Bereich die Abstrahlung auch über ϑ nahezu konstant ist. Dann wird die auf einen Sensor fallende Leistung durch das Linienintegral

$$P_{\text{Sensor}} = \frac{A}{4\pi} \cdot \alpha_{\vartheta} \cdot \alpha_{\varphi} \cdot \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P_{rad}(r)\, dr$$

beschrieben, wobei $\alpha_{\varphi} = \varphi_{\max} - \varphi_{\min}$ der Öffnungswinkel in φ–Richtung ist. In dieser Arbeit wurde diese Annahme jedoch nur insofern verwendet, daß die numerische Auswertung des Integrals über φ mit sehr wenigen Stützstellen (5) durchgeführt wurde.

In der mathematischen Darstellung kann also die Meßabbildung für den i^{ten} Sensor durch

$$M_i(l) = c_i \cdot \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} l\big(x_i(r,\varphi), y_i(r,\varphi)\big)\, d\varphi\, dr$$

[iv] Exakt wird diese Formulierung, wenn die Größe des Sensors gegen 0 geht.

beschrieben werden. Dabei sind $x_i(r,\varphi)$ und $y_i(r,\varphi)$ die Darstellungen der kartesischen Koordinaten von K in den sphärischen Koordinaten des i^{ten} Sensors und c_i die Empfindlichkeit des Sensors.

3.4 Modell für die Rekonstruktion

Eine optimale tomographische Rekonstruktion wäre eine Abbildung R von W nach L, so daß $R(\mathbf{w})$ für jeden Meßvektor $\mathbf{w}$ die diesem Vektor zugrunde liegende Abstrahlungsverteilung ergibt, also $M^{-1}(\mathbf{w})$ darstellt. Da aber die Dimension von $W \leq 25$ und L eine unbekannte Teilmenge eines unendlichdimensionalen Raumes ist, wird $M^{-1}(\mathbf{w})$ im allgemeinen nicht eindeutig sein. Es ist daher nicht zu erwarten, daß es eine solche Rekonstruktionsabbildung gibt. Eine exakte tomographische Rekonstruktion ist also nicht möglich.

Eine Möglichkeit, dennoch zu einer brauchbaren Rekonstruktion zu gelangen, besteht darin, L durch eine Modellmenge L_0 mit einer Dimension $\leq \dim(W)$ zu ersetzen, und für diese eine Rekonstruktionsabbildung $R{:}W \rightarrow L_0$ zu berechnen. Von dieser kann nun nicht mehr gefordert werden, daß jeder Meßvektor $\mathbf{w}$ auf die ihm zugrunde liegende Abstrahlungsverteilung abgebildet wird, da diese im allgemeinen nicht in L_0 liegen wird. Für die Beurteilung dieser Rekonstruktion müssen nun also andere Forderungen aufgestellt werden.

Auch wenn eine exakte Rekonstruktion nicht möglich ist, so wird von R doch sicherlich erwartet, daß $R(\mathbf{w})$ für jede Messung $\mathbf{w}$ nahe an einem Punkt aus $M^{-1}(\mathbf{w})$ liegt. Da diese Punkte jedoch nicht bekannt sind, kann diese Forderung nur so formuliert werden, daß $M(R(\mathbf{w}))$ möglichst nahe bei $\mathbf{w}$ liegen soll, also daß der Erwartungswert von $\left\| M\left(R(\mathbf{w})\right) - \mathbf{w} \right\|^2$ möglichst klein sein soll.

Eine weitere Forderung für die Beurteilung dieser Rekonstruktionen ist, daß möglichst keine negativen Werte bei den rekonstruierten Verteilungen auftreten, da negative Abstrahlungsintensitäten nicht möglich sind. Die scharfe Forderung, daß alle rekonstruierten Verteilungen stets überall größer als 0 sind, ist an dieser Stelle jedoch nicht sinnvoll, da unter Umständen erhebliche Vorteile bei den anderen Forderungen an die Rekonstruktion durch das Zulassen von negativen Werten gewonnen werden können. Um an eine Forderung zu gelangen, die dieses berücksichtigt, kann eine Funktion $g{:}L_0 \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ eingeführt werden, die ein Maß für die Negativität von $l \in L_0$ darstellt. Die Forderung lautet dann, daß der Erwartungswert von $g(R(\mathbf{w}))$ möglichst klein sein soll.

Werden diese beiden Forderungen zusammengefaßt, so erhält man für die Beurteilung einer Rekonstruktion die Forderung, daß der Erwartungswert von $\left\| M\left(R(\mathbf{w})\right) - \mathbf{w} \right\|^2 + c_{Neg} \cdot g\left(R(\mathbf{w})\right)$ möglichst klein sein soll. Dabei ist c_{Neg} ein Parameter der bestimmt, welches Gewicht den einzelnen Summanden zukommt. Minimiert werden soll also

$$\int_{\mathbb{R}^{25}} \left(\left\| M\left(R(\mathbf{w})\right) - \mathbf{w} \right\|^2 + c_{Neg} \cdot g\left(R(\mathbf{w})\right) \right) p(\mathbf{w})\, d\mathbf{w},$$

wobei $p(\mathbf{w})$ die Dichte der Messungen im $\mathbb{R}^{25}$ ist.

Von der Modellmenge L_0 muß zudem noch gefordert werden, daß die von ihr dargestellten Verteilungen den physikalischen Vorstellungen der Abstrahlungsverteilung entsprechen. Wie diese Vorstellungen lauten und welche Forderungen sich daraus für L_0 ergeben wird in Abschnitt 3.4.1.1 erläutert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde zunächst eine Modellmenge L_0 auf Grund von physikalischen und numerischen Überlegungen gewählt. Zu dieser wurde dann eine Rekonstruktionsabbildung R berechnet, welche den in diesem Abschnitt eingeführten Erwartungswert weitgehend minimiert.

3.4.1 Wahl der Modellmenge

Die Wahl der Modellmenge wird zunächst einmal durch die erste Forderung im vorherigen Abschnitt bestimmt: Die Modellmenge soll Verteilungen beinhalten, die nahe an den physikalisch erwarteten liegen. Dazu ist es zunächst notwendig zu wissen, was für Arten von Verteilungen physikalisch erwartet werden können.

3.4.1.1 Physikalische Forderungen an die Modellmenge

Der mit Abstand größte Anteil der abgestrahlten Leistung wird als Linienstrahlung von teilweise ionisierten Verunreinigungsatomen emittiert. Daher ist zu erwarten, daß die räumliche Verteilung der abgestrahlten Leistung im wesentlichen der Dichteverteilung von Verunreinigungsionen ähnelt.

Die Plasmarandschicht, also der äußere Bereich der zu rekonstruierenden Verteilung, ist durch einen hohen Druckgradienten senkrecht zu den magnetischen Flußflächen gekennzeichnet. In radialer Richtung ist dort daher mit recht großen Änderungen in der abgestrahlten Leistung zu rechnen. Parallel zu den magnetischen Flußflächen ist die Variation der Dichte sehr viel geringer, daher ist zu erwarten, daß die Dichteverteilung in diesem Bereich der Struktur der magnetischen Flußflächen folgen wird. Die Schnitte der Flußflächen mit dem betrachteten Bereich haben wiederum im Wesentlichen die Form von ineinander geschachtelten Kreisen, deren Mitte mit abnehmendem Radius durch den Shafranov–Shift nach außen verschoben ist (siehe Abb.).

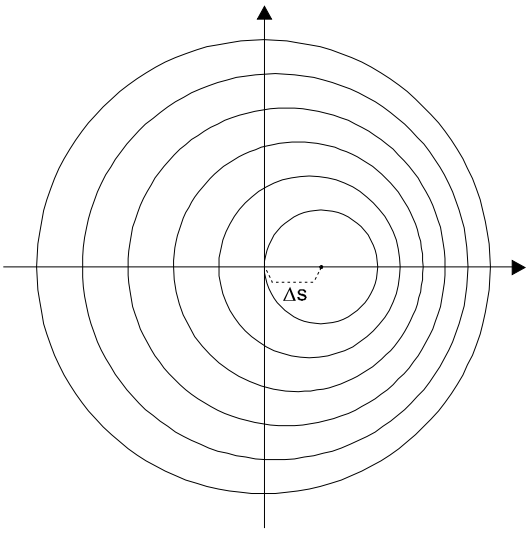

Abbildung 18: Schematische Darstellung der Flußflächen mit Shafranov–Shift Δs.

Durch die toroidale Geometrie des Tokamaks treten jedoch Abweichungen von der Rotationssymmetrie der Dichte auf den einzelnen Flußflächen auf. Nach [27] können diese näherungsweise durch die erste Fourierkomponente dargestellt werden.

Abweichungen von dieser Struktur in der Dichte von Verunreinigungen treten dort auf, wo lokal Verunreinigungen freigesetzt werden, im Fall von TEXTOR also an den Limiterplatten. Dort ist mit einer lokalen Erhöhung der Dichte von Verunreinigungen, also auch der Linienstrahlung, zu rechnen.

Im Kern des Plasmas ist der Dichtegradient normalerweise klein, daher ist im Inneren des zu rekonstruierenden Bereiches mit einer weniger scharf begrenzten Abstrahlung mit eventuell gegenüber der Mitte des Gefäßes verschobenem Zentrum zu rechnen.

Die Verunreinigungen gelangen von außen in das Plasma und werden auf ihrem Weg nach innen sukzessive ionisiert. Die relativ leichten Kohlenstoffatome des Limiters und eventuell zur Kühlung eingesetzte Neon–Atome werden bereits in den äußersten Bereichen des Plasmas vollständig ionisiert. Von diesen Verunreinigungen ist also nur Strahlung aus den äußersten Bereichen der zu rekonstruierenden Fläche zu erwarten. Linienstrahlung aus dem Inneren des Plasmas ist nur dann zu erwarten, wenn sehr schwere Elemente das Plasma verunreinigen.

Vor diesem physikalischen Hintergrund sollte die gesuchte Modellmenge also Verteilungen beinhalten, die im äußeren Bereich einer kreissegmentartigen Struktur folgen und im inneren Bereich einen mehr oder weniger stark verschobenen „Buckel“ enthalten können.

3.4.1.2 Konstruktion der Menge

Vor diesem Hintergrund wurde für die Modellmenge ein Vektorraum gewählt, der von auf Grund von geometrischen Überlegungen ausgewählten Basisfunktionen aufgespannt wird.

Dabei sollen die Basisfunktion in der Lage sein, Verteilungen zu erzeugen, welche die erwarteten Charakteristika aufweisen wie etwa die erhöhte Abstrahlung vor dem Limiter. Da die Prozesse, welche zur Strahlung führen, oft lokal begrenzt sind, liegt es nahe, Basisfunktionen mit einem relativ kleinen Träger zu verwenden. Ferner ist es sinnvoll, die Konstruktion der Basisfunktionen so zu wählen, daß sich mit möglichst wenig Rechenaufwand eine Funktion berechnen läßt, die ein Maß für die Negativität der erzeugten Verteilungen darstellt, da eine solche für die Berechnung der Rekonstruktionsabbildung benötigt wird (vgl. Abschnitt 3.4).

Für die Konstruktion der Basis wurde K zunächst in zwei Bereiche aufgeteilt:

Im äußeren Bereich des Plasmas – etwa für einen Radius > 0,5 – ist zu erwarten, daß die Abstrahlungsverteilungen einer kreissegmentartigen Struktur folgen. Daher ist es sinnvoll, für diesen Bereich Basisfunktionen b^1 zu wählen, die ebenfalls eine kreissegmentartige Struktur aufweisen.

Im Inneren des Plasmas wird keine kreissegmentartige Struktur erwartet, vielmehr wird hier, für den Fall daß aus diesem Bereich eine Abstrahlung stattfindet, ein einzelnes mehr oder weniger gegen die Mitte des Gefäßes verschobenes lokales Maximum der Strahlung erwartet. Daher müssen hier andere Basisfunktionen b^2 gewählt werden als für den äußeren Bereich.

Die kreissegmentartige Struktur legt für die Basisfunktionen in dem äußeren Bereich eine Darstellung in Polarkoordinaten (r,φ) nahe. Die b^1 wurden wie folgt gewählt:

Die Kreisscheibe wurde in n_φ Kreissegmente unterteilt, wobei die Unterteilungen an den poloidalen Positionen φ_i mit $i = 1,\ldots,n_\varphi$ liegen. An jeder dieser poloidalen Positionen φ_i wurde eine radiale Unterteilung in $n_r(i)$ Abschnitte vorgenommen. Die Unterteilungen liegen dabei an den Radien r_{ij} mit $j = 1,\ldots,n_r(i)$, wobei stets $r_{in_r(i)} = 1$ ist. Der Träger der Basisfunktion b_{ij}^1 wurde nun gewählt als der Bereich, der durch φ_{i-1} und φ_{i+1} in poloidaler und durch $r_{i(j-1)}$ und $r_{i(j+1)}$ in radialer Richtung begrenzt ist. Der Punkt (r_{ij},φ_i) wird im Folgenden als Stützpunkt der Basisfunktion b_{ij}^1 bezeichnet.

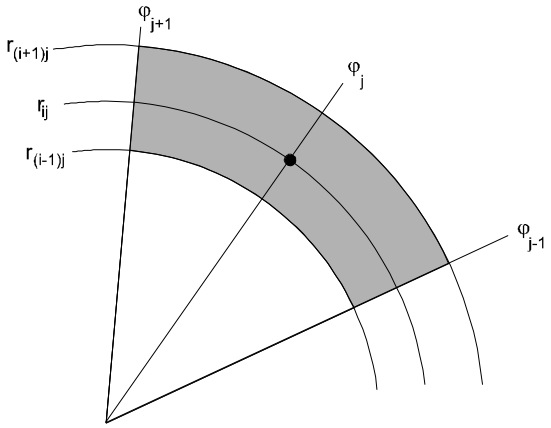

Abbildung 19: Stützpunkt und Träger der Basisfunktion b_{ij}^1

Die Basisfunktionen b_{ij}^1 wurden in diesem Bereich zunächst[v] wie folgt definiert:

$$b_{ij}^1(r,\varphi)=\begin{cases}\cos^2\left(\tilde{r}_{ij}\right)\cdot\cos^2\left(\tilde{\varphi}_i\right) & \text{wenn } r_{i(j-1)}<r<r_{i(j+1)} \text{ und } \varphi_{i-1}<\varphi<\varphi_{i+1}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\text{mit } \tilde{r}_{ij}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(\frac{r-r_{ij}}{r_{ij}-r_{i(j-1)}}\right) \text{ für } r_{i(j-1)}<r<r_{ij}\\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{r-r_{ij}}{r_{i(j+1)}-r_{ij}}\right) \text{ für } r_{ij}<r<r_{i(j+1)}\end{cases} \text{ und } \tilde{\varphi}_i=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varphi-\varphi_i}{\varphi_i-\varphi_{i-1}}\right) \text{ für } \varphi_{i-1}<\varphi<\varphi_i\\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varphi-\varphi_i}{\varphi_{i+1}-\varphi_i}\right) \text{ für } \varphi_i<\varphi<\varphi_{i+1}\end{cases}$$

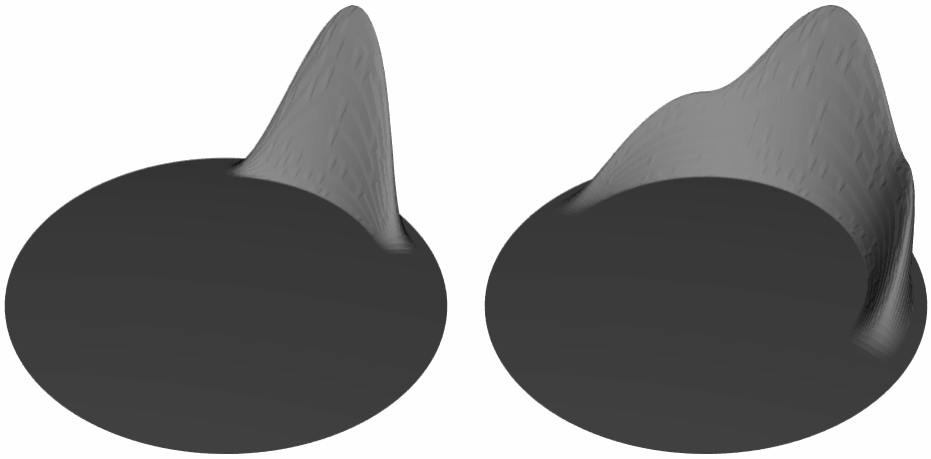

Abbildung 20: Beispiel einer Basisfunktion b_{ij}^1 und Überlagerung mehrerer Basisfunktionen

[v] Später wurden einige Basisfunktionen zwecks Normierung noch modifiziert, siehe Seite 49

Der innere Bereich, in dem für die Rekonstruktion Basisfunktionen eines anderen Typs verwendet wurden, wurde festgelegt als $(x, y): |x| < \frac{1}{2}$ und $|y| < \frac{1}{2}$. In diesem Bereich wurden vier Basisfunktionen b_{ab}^2 mit $a, b \in \{-1,1\}$ verwendet. Der Träger dieser Funktionen wurde gewählt als $(x, y): x \in [a \cdot \frac{1}{2}, -a \cdot r_v]$, $y \in [b \cdot \frac{1}{2}, -b \cdot r_v]$. Der Punkt ($a \cdot r_v, b \cdot r_v$) wird im folgenden als Stützpunkt der Basisfunktion b_{ab}^2 bezeichnet.

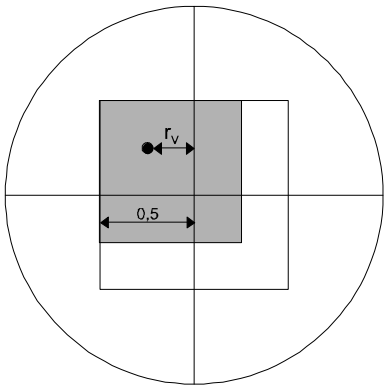

Abbildung 21: Stützpunkt und Träger der Basisfunktion $b^2_{(-1)1}$

Die Basisfunktionen b_{ab}^2 wurden in diesem Bereich zunächst wie folgt definiert:

$$b_{ab}^2(x, y) = \begin{cases} \cos^2(\tilde{x}) \cdot \cos^2(\tilde{y}) & \text{wenn } -r_v < a \cdot x < 0{,}5 \text{ und } -r_v < b \cdot y < 0{,}5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } \tilde{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(\frac{a \cdot x - r_v}{2 \cdot r_v}\right) & \text{für } -r_v < x < r_v \\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{a \cdot x - r_v}{0{,}5 - r_v}\right) & \text{für } r_v < x < 0{,}5 \end{cases} \quad \text{und } \tilde{y} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(\frac{b \cdot y - r_v}{2 \cdot r_v}\right) & \text{für } -r_v < y < r_v \\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{b \cdot y - r_v}{0{,}5 - r_v}\right) & \text{für } r_v < y < 0{,}5 \end{cases}$$

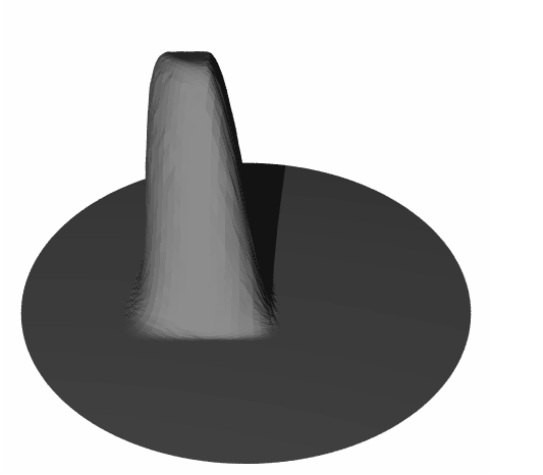

Abbildung 22: Beispiel einer Basisfunktion b_{ab}^2

Für die r_{i0}, also die inneren Grenzen der Träger der innersten Basisfunktionen des äußeren Bereiches, wurden Werte kleiner als ½ gewählt, so daß es einen Bereich gibt, in dem sich die Träger der b_{i0}^1 und die der b_{ab}^2 überlappen.

Mit den so definierten Basisfunktionen ist es auf sehr einfache Art möglich, eine Funktion zu definieren, die als Maß für Negativität einer rekonstruierten Verteilung verwendet werden kann. Alle verwendeten Basisfunktionen haben auf ihrem jeweiligen Träger die Form $b_k(x,y) = \cos^2\left(\alpha_k(x,y), \beta_k(x,y)\right)$. Somit läßt sich jeder Funktionswert einer rekonstruierten Verteilung als $l(x,y) = \sum_i c_i \cdot \cos^2\left(\alpha_i(x,y), \beta_i(x,y)\right)$, wobei über alle i summiert wird, für die (x,y) in dem Träger von b_i liegt. Somit liegt $l(x,y)$ stets in der konvexen Hülle dieser c_i, also $\min(c_i) \le l(x,y) \le \max(c_i)$. Da aber an jeder Stützstelle nur eine Basisfunktion b_m einen von 0 verschiedenen Wert (nämlich 1) hat, nehmen die rekonstruierten Verteilungen an dieser Stelle den Wert des zugehörigen Koeffizienten c_m an.

Das heißt also, das alle Extremwerte einer rekonstruierten Verteilung an den Stellen der Stützpunkte angenommen werden und der Funktionswert an dieser Stelle gleich dem Wert des Koeffizienten für die zu dem Stützpunkt gehörige Basisfunktion ist. Für eine Rekonstruktion $l_{\mathbf{w}}(x,y)$ aus einem Meßvektor $\mathbf{w}$

$$l_{\mathbf{w}}(x,y) = \sum_{i=1}^{n_b} c_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n_b} R(\mathbf{w})_i \cdot b_i$$

kann die Funktion

$$g(R(\mathbf{w})) = \sum_{i=1}^{n_b} \begin{cases} 0 & : R(\mathbf{w})_i \ge 0 \\ R(\mathbf{w})_i^2 & : R(\mathbf{w})_i < 0 \end{cases}$$

also als das gewünschte Maß für die Negativität verwendet werden.

Um zu erreichen, daß $\sum_{i=1}^{n_b} b_i(x,y)$ abgesehen von dem Randbereich stets den Wert 1 hat, wurden die Basisfunktionen noch durch $b_j'(x,y) = \frac{b_j(x,y)}{\sum_{i=1}^{n_b} b_i(x,y)}$ normiert. Da auf dem Rand von *K* keine Abstrahlung auftreten kann, muß jedoch der Wert von $\sum_{i=1}^{n_b} b_i'(x,y)$ am Rand gegen 0 gehen. Daher wurden die b_{ij}^1 mit $j = n_r(i) - 1$, also die äußersten b_{ij}^1 jedes φ_i von dieser Normierung ausgenommen. Diese Normierung ändert nicht an der Verwendbarkeit der oben definierten Funktion $g(l)$ als Maß für die Negativität einer Abstrahlungsverteilung.

Die Anordnung der Basisfunktionen wurde zunächst[vi] so gewählt, daß die φ_i an die physikalisch ausgezeichneten poloidalen Positionen – also der Position des Limiters und der Hochfeldseite – gesetzt wurden. An diesen Stellen werden lokale Maxima der Abstrahlung erwartet. Da von diesen jedoch nur eine geringe poloidale Ausdehnung erwartet wird, wurden weitere φ_i auf beiden Seiten neben diesen Positionen gewählt, die somit die Träger der Basisfunktionen bei dem Limiter und der Hochfeldseite begrenzen.

Da in dem äußeren Bereich des Plasmas nur ein schmaler strahlender Streifen nahe dem Rand erwartet wird, wurden für die r_{ij} dicht beieinander liegende Werte nahe 1 verwendet. Im Laufe der Arbeit wurden Anordnungen mit zwei bis vier r_{ij} mit gemeinsamem φ_i verwendet. Die besten Ergebnisse wurden mit Anordnungen erzielt, die an den physikalisch ausgezeichneten poloidalen Positionen drei und sonst zwei r_{ij} pro φ_i verwendeten. Die r_{ij} wurden dabei auf 0,85 und 0,95 bzw. 0,7, 0,85 und 0,95 gesetzt.

[vi] Die Anordnung wurde im weiteren Verlauf der Arbeit variiert, vgl. Abschnitt 3.5.

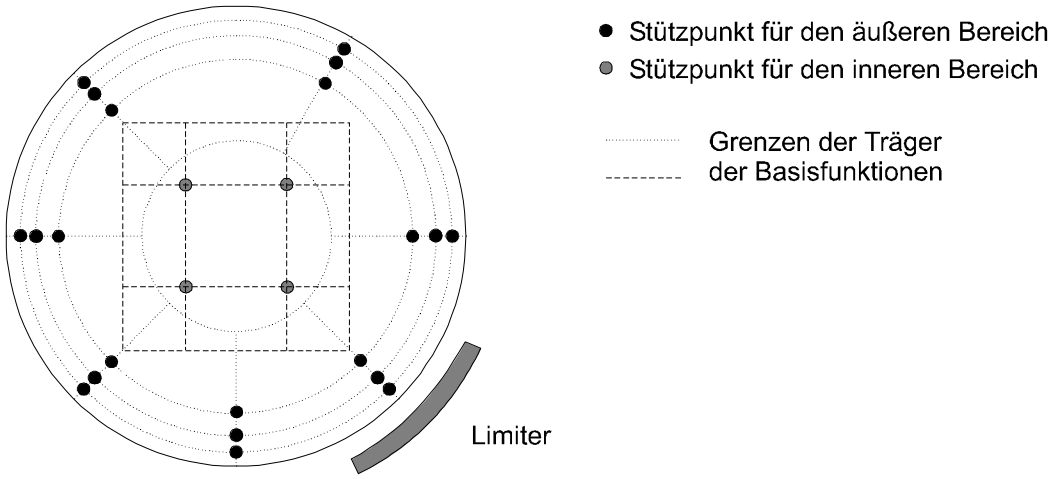

Abbildung 23: Eine mögliche Verteilung von 25 Basisfunktionen

3.4.2 Berechnung der Rekonstruktionsabbildung

Für die Berechnung der Rekonstruktionsabbildung wurde zunächst einmal vorausgesetzt, daß diese linear ist. Dies ist nicht unbedingt notwendig, es ist beispielsweise theoretisch möglich, daß eine Abstrahlungsverteilung einen bestimmten Meßvektor liefert und eine völlig andere Verteilung ein Vielfaches des gleichen Meßvektors ergibt. Da jedoch im vorliegenden Fall keine Möglichkeit besteht, diese zu unterscheiden, liegt es nahe, als Rekonstruktionsabbildung eine lineare Abbildung zu verwenden. Gesucht wird hier also eine $25 \times dim(L_0)$ – Matrix.

Zu einem vorgegebenen Satz von Basisfunktionen, welche die Modellmenge aufspannen, muß nun diese Matrix R gefunden werden, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^{25}} \left(\left\| M\left(R(\mathbf{w})\right) - \mathbf{w} \right\|^2 + c_{Neg} \cdot g\left(R(\mathbf{w})\right) \right) \cdot p(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}$$

minimiert wird.

Da die Dichte der Messungen $p(\mathbf{w})$ unbekannt ist, wurde diese durch Stichproben – also einzelne Messungen – geschätzt. Das bedeutet, daß nun für K Stichproben der Term

$$\Phi = \sum_{k=0}^{K} \left\| M\left(R\left(\mathbf{w}_k\right)\right) - \mathbf{w}_k \right\|^2 + c_{Neg} \cdot g\left(R\left(\mathbf{w}_k\right)\right)$$

minimiert werden mußte. Das Ergebnis dieser Minimierung hängt natürlich entscheidend von den verwendeten Stichproben ab. Daher wurde versucht, für diese Stichproben Messungen aus möglichst vielen Situationen des Plasmas zu verwenden. Insgesamt wurden hier 650 Messungen aus 13 Entladungen benutzt. Darunter waren ohmsche Entladungen

und mit Neutralteilcheninjektion zusätzlich geheizte Schüsse, jeweils mit und ohne Strahlungskühlung und bei zwei verschiedenen Dichten.

Der Gradientenabstieg erfolgte – analog zu dem im ersten Teil der Arbeit beschriebenen – so, daß $\mathbf{R}_{ij}$ durch $\mathbf{R}_{ij} - c_G \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{R}_{ij}} \mathbf{R}_{ij}$ ersetzt wurde, wobei wiederum c_G eine Konstante ist, deren (Start–) Wert empirisch ermittelt wurde. Bei der Durchführung des Gradientenabstiegs ergaben sich folgende Besonderheiten:

- Die Konstante c_G wurde wie im ersten Teil der Arbeit dynamisch verändert: Verkleinerte sich bei einem Schritt des Gradientenabstiegs der Wert von Φ, so wurde c_G vergrößert (etwa um den Faktor 1,1); vergrößerte sich der Wert von Φ, so wurde c_G verkleinert (etwa um den Faktor 0,5).

- Es zeigte sich, daß eine erhebliche Beschleunigung des Minimierungsprozesses stattfand, wenn zunächst nicht der vollständige Gradient von Φ berechnet wurde bevor die Matrixkomponenten verändert wurden, sondern diese Änderung bereits jeweils nach der Berechnung eines Summanden von Φ in die Richtung dieses Summanden stattfand. Dieses Verfahren stagniert jedoch nach einigen 10 bis einigen 100 Schritten, wobei ein Schritt in diesem Fall die Durchführung einer Änderung für alle Matrixkomponenten und alle Stichproben bedeutet. Bei Erreichen der Stagnation wurde die Minimierung dann mit dem vollständigen Gradienten fortgesetzt.

- Bei beiden Teilen der Minimierung – also bei der Verwendung des vollständigen Gradienten und der einzelnen Summanden – ergab sich ein erheblicher Geschwindigkeitsvorteil, wenn zusätzlich ein Trägheitsterm eingeführt wurde. Dies wurde so realisiert, daß statt des Gradienten im n^{ten} Schritt ein Term $\Theta_n := \frac{q \cdot \Theta_{n-1} + \Delta\Phi}{q+1}$ verwendet wurde. q ist dabei ein Faktor, der bestimmt, wie stark der Einfluß der Trägheit sein soll. Die besten Ergebnisse wurden dabei für q–Werte von etwa 5 bis 10 erzielt.

- Eine weitere Verkleinerung des Restfehlers fand auch – wenn auch nur in sehr geringem Maße – nach der höchsten durchgeführten Anzahl von Schritten noch statt. Diese lag bei einigen 10000.

- Für die Initialisierung der Matrixkomponenten vor dem Gradientenabstieg wurden verschiedene Verfahren ausprobiert. Es erwies sich als zweckmäßig, die Komponenten auf feste Werte (und nicht etwa auf Zufallswerte) zu initialisieren, um definierte und vergleichbare Anfangsbedingungen zu erhalten. Dabei konnte nach ausreichend vielen Iterationen kein nennenswerter Unterschied zwischen Ergebnissen, die mit einer Matrix errechnet wurden, bei der alle Komponenten auf den gleichen Wert initialisiert wurden, und solchen, bei denen die Matrixkomponenten auf unterschiedliche Werte initialisiert wurden, festgestellt werden. Es zeigte sich, daß Initialisierungen, welche die zu

erwartenden Verteilungen in grober Form berücksichtigten, ebenfalls zu sehr ähnlichen Ergebnissen führten und die Minimierung des Fehlers erheblich beschleunigten. Vor diesem Hintergrund wurden die Matrixkomponenten, welche den äußersten Punkten in dem polaren Bereich entsprachen, alle auf einen festen positiven Wert und alle anderen Matrixkomponenten auf 0 initialisiert.

3.5 Variation der Basisfunktionen

Mit diesem Verfahren ist es möglich, zu einer vorgegebenen Modellmenge L_0 eine passende Rekonstruktionsabbildung zu berechnen. Die Wahl der Modellmenge ist zwar durch Überlegungen zu dem physikalischen Hintergrund motiviert, es kann jedoch keine Aussage darüber getroffen werden, ob diese Modellmenge unter den vorliegenden Gegebenheiten besonders günstig gewählt ist, also für die betrachteten Messungen besonders gute Rekonstruktionen erzeugt. Daher wurde nun versucht, durch Variation der Basisfunktionen die Modellmenge zu optimieren.

Zu diesem Zweck wurde jeder Kombination von Modellmenge und Rekonstruktionsabbildung ein Fehler Φ_{Rek} zugeordnet, der sich aus mehreren unterschiedlich gewichteten Komponenten zusammensetzte. Diese sind in absteigender Wichtung:

- Der nach der Berechnung der Rekonstruktionsabbildung verbleibende Wert für den ersten Summanden von Φ:
  $$\Phi_{Abweich} = \sum_{k=0}^{K} \left\| M\left(R\left(\mathbf{w}_k\right)\right) - \mathbf{w}_k \right\|^2 ,$$
  also die Abweichung von $R(\mathbf{w})$ zu einem $M^{-1}(\mathbf{w})$;

- Die nach der Berechnung der Rekonstruktionsabbildung verbleibende Negativität der Rekonstruktionen, also der zweite Summand von Φ:
  $$\Phi_{Negativ} = \sum_{k=0}^{K} g\left(R\left(\mathbf{w}_k\right)\right).$$

- Ein Term, der verhindern soll, daß Stützpunkte zu dicht beieinander liegen. Ein sehr geringer Abstand zwischen Stützpunkten würde zu sehr steilen Änderungen in den rekonstruierten Verteilungen führen, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Zu diesem Zweck wurde dieser Term mit den in Abschnitt 3.4.1.2 eingeführten Bezeichnungen definiert als
  $$\Phi_{Abstand} = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left(\frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} + \sum_{j=2}^{n_r(i)} \frac{1}{r_{ij} - r_{i(j-1)}} \right) + \frac{1}{r_v} .$$

- Ein (schwach gewichteter) Term, der diejenigen Rekonstruktionsabbildungen bevorzugt, die Verteilungen mit weniger Variation in poloidaler Richtung erzeugt. Dieser ist in Polarkoordinaten:
  $$\Phi_{Variation} = \frac{1}{m_r} \sum_{i=1}^{m_r} \sigma_i \quad \text{mit}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{m_\varphi \sum_{j=1}^{m_\varphi} l\left(r_i, j \cdot \frac{2\pi}{m_\varphi}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{m_\varphi} l\left(r_i, j \cdot \frac{2\pi}{m_\varphi}\right)\right)^2}{m_\varphi\left(m_\varphi - 1\right)}}.$$

σ_i gibt dabei die Standardabweichung von m_φ Werten von l an, welche die gleich radiale Koordinate r_i haben und poloidal äquidistant auf K verteilt sind, also ein Maß für die poloidale Variation der Verteilung beim Radius r_i. Hier wurden m_φ=20, m_r=3 und r_i={0,8, 0,9, 0,95} gewählt.

Es ist also $\Phi_{Rek} = c_1 \cdot \Phi_{Abweich} + c_2 \cdot \Phi_{Negativ} + c_3 \cdot \Phi_{Abstand} + c_4 \cdot \Phi_{Variation}$. Die Werte der Wichtungsfaktoren c_i für diese vier Terme wurden auf Grund von heuristischen Überlegungen gewählt. So wurde etwa für c_3, also den Wichtungsfaktor für den Abstands-Term, zunächst ein sehr kleiner Wert gewählt. Dieser wurde dann im Laufe der Arbeit so lange erhöht, bis nach der Optimierung der Modellmenge die Abstände zwischen den Stützpunkten „ausreichend groß“ waren, also anschaulich plausible Werte annahmen. Auf ähnliche Art wurden auch die Werte für die anderen Faktoren gewählt. Dabei erwies sich ein Verhältnis der gewichteten Terme (also $c_x \cdot \Phi_x$) von etwa 10:1:1:1 (in der oben verwendeten Reihenfolge) als zweckmäßig.

Ausgehend von einer Modellmenge wurde die Rekonstruktionsabbildung und damit dann ein Fehler als Summe dieser Terme berechnet. Anschließend wurden alle φ_i und r_{ij}, also die Positionen der Stützpunkte im äußeren Bereich, sowie r_v, also die Positionen der Punkte im inneren Bereich, leicht variiert. Dazu wurden auf diese Größen normalverteilte Zufallswerte addiert. Deren Standardabweichung lag zunächst bei 0,02 für die r_{ij} und r_v sowie 0,04 für die φ_i.

Wurden durch die Variation die Reihenfolge zweier φ_i oder r_{ij} vertauscht, so wurde die Variation, welche hierzu geführt hatte, solange wiederholt, bis dies nicht mehr der Fall war. Ebenso wurde verfahren, wenn zwei oder mehr Punkte nach der Variation die gleiche Position einnahmen oder wenn r_v oder ein r_{i0} größer als ½ wurde.

Zu dieser variierten Modellmenge wurde wiederum nach obigem Verfahren eine Rekonstruktionsabbildung und mit dieser auch die eben definierte Fehlerfunktion berechnet. Diejenige Modellmenge, welche hierbei den geringeren Fehler ergab, wurde als Grundlage für die folgende Variation weiter verwendet.

Im Gegensatz zu dem Gradientenabstieg brachte die Einführung eines Trägheitsterms für die Variation keinen ersichtlichen Vorteil.

Um bei diesem Verfahren das Risiko des Festlaufens in lokalen Minima zu reduzieren, wurde für Variationen, welche einen größeren Fehler ergaben als die Ausgangsanordnung, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit diese als Basis für weitere Variationen genommen. Die Wahrscheinlichkeit wurde dabei als exponentiell mit der Fehlerdifferenz abfallend gewählt.

Es erwies sich als vorteilhaft, die Variation der Basisfunktion zunächst mit einer relativ großen Standardabweichung zu beginnen und diese im Verlauf der weiteren Variationen zu verkleinern. Dies wurde beispielsweise so durchgeführt, daß nach jeweils 200 Variationsschritten alle Standardabweichungen um den Faktor 0,75 verkleinert wurden.

3.5.1 Parallelisierung des Verfahrens

Dieses Verfahren zur Optimierung der Anordnung von Basisfunktionen ist extrem rechenaufwendig: Für jede Variation der Anordnung müssen einige hundert Schritte des Gradientenabstiegsverfahrens durchgeführt werden; jeder Schritt besteht aus einigen hundert Veränderungen der Matrixkomponenten (für jede verwendete Messung eine) und bei jeder Veränderung der Matrixkomponenten müssen einige hundert Ableitungen (Anzahl der Basisfunktionen multipliziert mit der Anzahl der Meßwerte) berechnet werden. Da hier mit einem statistischen Verfahren (der Variation der Anordnung) ein System mit relativ vielen Parametern (etwa 30) optimiert werden soll, müssen recht viele Schritte dieses Verfahrens durchgeführt werden. In der Praxis hat sich gezeigt, daß selbst nach mehreren tausend Schritten noch deutliche Änderungen in dem minimal erreichten Fehler nicht ungewöhnlich sind. Dabei ist es trotzdem noch möglich, daß die so berechnete Anordnung weit von der optimalen entfernt ist. So zeigte sich beispielsweise, daß nach mehrfacher Durchführung von einigen tausend Schritten des Gradientenabstiegsverfahrens für die gleiche Anordnung die minimal erreichten Fehler sich zum Teil noch um einen Faktor 10 und mehr unterschieden. Es empfiehlt sich also, für jede Ausgangsanordnung diese Optimierung mehrmals durchzuführen. Zudem scheint es sinnvoll, das Verfahren für verschiedene Anordnungen als Ausgangspunkt zu durchlaufen.

Selbst bei schnellen heutigen Rechnern werden die Rechenzeiten für dieses Verfahren dadurch so groß, daß eine Durchführung kaum praktikabel erscheint. Die Berechnung einer Rekonstruktionsmatrix für eine einzige Variation der Anordnung dauert bereits einige Minuten; eine sinnvolle Optimierung der Anordnung benötigt also etliche Tage Rechenzeit auf einem konventionellen System.

Die Struktur des Verfahrens erlaubt jedoch auf sehr einfache Art eine Parallelisierung der Berechnung: Jede beteiligte Recheneinheit variiert die Anordnung der Basisfunktionen unabhängig von den anderen Einheiten und führt den Gradientenabstieg sowie die Berechnung des Fehlers für diese Variation durch. Von allen so berechneten Variationen wird diejenige mit dem geringsten Fehler dann als Grundlage für die nächsten Variationen verwendet.

Der Gewinn an Rechengeschwindigkeit läßt sich wie folgt abschätzen: Ist q die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der berechnete Fehler durch eine Variation der Basisfunktionen geringer wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter n Variationen eine mit einem geringeren Fehler ist $1-(1-q)^n$, daß Verhältnis also $V = \frac{1-(1-q)^n}{q}$. Während des größten Teils der Berechnungen ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Variation zu einem geringeren Fehler

führt, sehr klein; somit wird also $V = n \cdot q + 0(q^2)$. Das heißt also, daß für den größten Teil der Berechnungen die Rechenzeit umgekehrt proportional zur Anzahl der beteiligten Recheneinheiten ist.

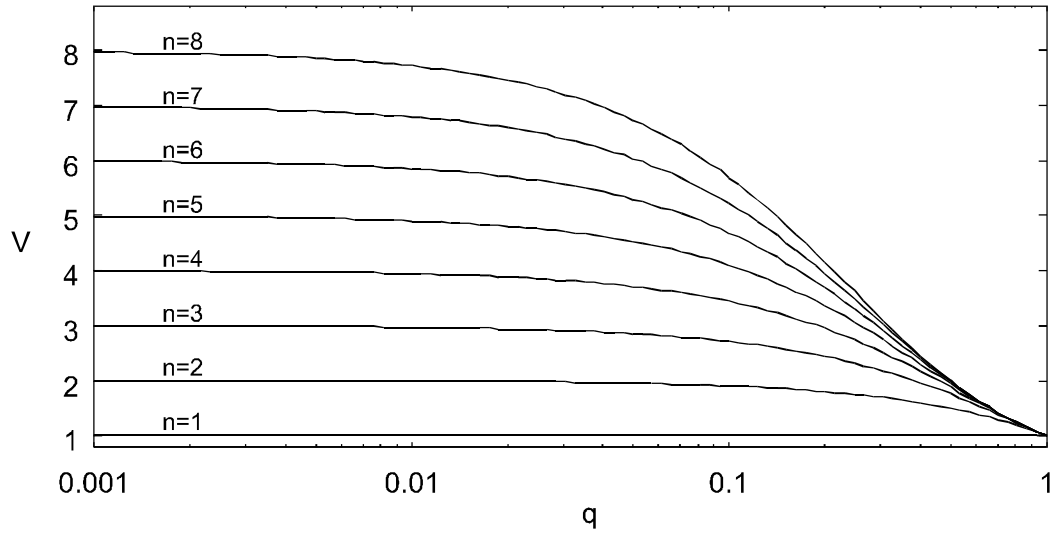

Abbildung 24: Abschätzung des Gewinns an Rechengeschwindigkeit durch Parallelisierung. n=**Anzahl der Recheneinheiten,** V=**Verhältnis der Rechenzeiten,** q=**Wahrscheinlichkeit für Verringerung des Fehlers**

Lediglich für die ersten Schritte der Variation einer Anordnung, bei denen *q* noch relativ groß ist, ist dieser Vorteil geringer. Hier kann allerdings diese Abschätzung nur noch bedingt verwendet werden, da bei der Berechnung von *n* Variationen der Ausgangsanordnung hier auch der Fall betrachtet werden muß, daß mehrere Variationen einen geringeren Fehler liefern. In diesem Fall ist dann die mittlere Verringerung des Fehlers pro Schritt für mehrere Recheneinheiten größer als für eine Recheneinheit, also wird der Gewinn an Rechengeschwindigkeit größer als obiges Modell vorhersagt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Verfahren auf einem Parsytec XPlorer implementiert. Dies ist ein Parallelrechner, bei dem die einzelnen Recheneinheiten jeweils eigenen Speicher für Daten und Programm besitzen (*MIMD – M*ultiple *I*nstruction, *M*ultiple *D*ata). Auf jedem Prozessor läuft dann das gleiche Programm ab, wobei während der Laufzeit die Nummer der Recheneinheit abgefragt werden kann und so unterschiedliche Programmabläufe auf den einzelnen Recheneinheiten erreicht werden können. Jede Recheneinheit besteht hier aus einem Hauptprozessor und einem Kommunikationsprozessor, der den Datenaustausch mit anderen Prozessoren unabhängig von dem Hauptprozessor durchführt.

Das Verfahren wurde dabei wie folgt implementiert: Eine Recheneinheit übernimmt die Funktion einer Zentraleinheit. Von dieser wird zunächst an jede Recheneinheit eine Kopie der Ausgangsanordnung verschickt. Jede beteiligte Recheneinheit nimmt dann eine

Variation der Anordnung vor, wobei der verwendete Zufallsgenerator abhängig von der Prozessornummer initialisiert wird[vii]. Anschließend teilt jede Recheneinheit der Zentraleinheit den resultierenden Fehler mit. Die Zentraleinheit entscheidet dann, welche Anordnung als Ausgangsanordnung für den nächsten Variationsschritt verwendet wird und lädt diese von der entsprechenden Recheneinheit. Mit dieser Anordnung startet der Zyklus von neuem.

Für die Berechnungen dieser Arbeit stand ein XPlorer mit 8 Recheneinheiten zur Verfügung. Auch mit diesem Rechner dauerte die Optimierung einer Anordnung meist noch recht lang: Die Optimierung einer Anordnung von 20 Basisfunktionen mit 2000 Variationsschritten (250 pro Recheneinheit), bei der für jede Variation 500 Gradientenabstiegsschritte mit 650 Messungen berechnet wurden, dauerte auch mit diesem System noch etwa zwei Wochen. Auf einem nicht parallelen System wäre die für eine solche Berechnung notwendige Rechenzeit wohl kaum noch praktikabel.

[vii] Bei der Initialisierung wird ebenfalls die aktuelle Zeit verwendet um sicherzustellen, daß verschiedene Läufe des Programms nicht den selben Weg durchlaufen.

3.6 Ergebnisse der Rekonstruktion

Für die hier vorgestellten Ergebnisse der Rekonstruktion wurde eine Ausgangskonfiguration verwendet, bei der die Basisfunktionen an 6 poloidalen Positionen angeordnet waren. Diese wurden auf $\{1..7\}\cdot\pi/4$ initialisiert. Dabei waren an den Positionen $\pi/2$ und $3\pi/2$ jeweils 3 Basisfunktionen angeordnet, an allen anderen Positionen 2. Deren radiale Position wurde auf 0,5 (bei $\pi/2$ und $3\pi/2$), 0,85 und 0,95 initialisiert.

Von dieser Anordnung wurden 200 Variationsschritte mit je 8 Variationen (auf den 8 vorhandenen Prozessoren) berechnet. Für jeden Variationsschritt wurde die Rekonstruktionsabbildung zunächst durch 100 Schritte des Gradientenabstiegs mit einzelnen Messungen und anschließend 500 Schritte des Gradientenabstiegs mit der Summe der Messungen durchgeführt. Dazu wurden 650 Messungen aus 13 Entladungen verwendet, die so ausgewählt waren, daß stets eine nennenswerte Gesamtintensität vorhanden war (also während der Dauer der eigentlichen Entladung). Der verbleibende Restfehler wurde durch die Variation der Basisfunktionen etwa um den Faktor 4 vermindert.

Für die aus dieser Variation erhaltene Anordnung von Basisfunktionen und die zugehörige Rekonstruktionsabbildung wurden anschließend noch auf einem schnellen Einzelprozessor-Rechner weitere 5000 Schritte des Gradientenabstiegs berechnet, wobei die selben Messungen verwendet wurden wie vorher. Dadurch wurde der Restfehler um etwa zwei Zehnerpotenzen verkleinert.

Da keine Möglichkeit besteht, gesicherte Verteilungen der Abstrahlung zu berechnen, können die hier errechneten Rekonstruktionen nicht mit den tatsächlichen Verteilungen verglichen werden. Auch ist es hier nicht sinnvoll, eine Verteilung vorzugeben und die Genauigkeit deren Rekonstruktion zu beurteilen, da diese Verteilung im allgemeinen nicht in der Menge sein wird, die zum Optimieren der Basisfunktionen und zum Berechnen der Rekonstruktionsabbildung verwendet wurde.

Eine Bewertung der Rekonstruktionen kann hier nur auf Grund von zwei Kriterien erfolgen: Zum einen ob die rekonstruierte Verteilung den physikalischen Erwartungen entspricht und zum Anderen wie groß die Abweichung von aus der Rekonstruktion errechneten Projektionen, die „Meßwerten“ entsprechen, zu den zu Grunde liegenden Meßwerten ist.

Alle folgenden Abbildungen wurden auf die jeweils maximale Strahlungsintensität normiert. Dabei gibt die folgende Skala die Zuordnung der Farben zu den relativen Intensitäten an:

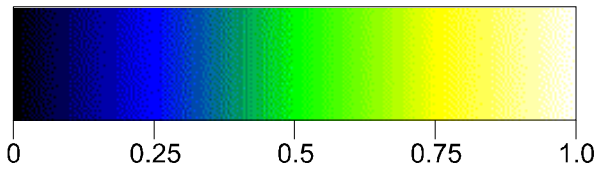

Abbildung 25: Farbskala für die Rekonstruktionsabbildungen

Bei „normalen“ Entladungen ist zu erwarten, daß die Strahlung im wesentlichen in der Nähe des Limiters emittiert wird, da dieser hier die Hauptquelle von Verunreinigungen stellt. Wie in den folgenden zwei Abbildungen zu sehen, entsprechen die Rekonstruktionen in diesen Fällen sehr gut den Erwartungen. Auch ist bei diesen Entladungen die Übereinstimmung von Meßwerten und aus den Rekonstruktionen berechneten Projektionsdaten sehr gut. Ein nennenswerter Unterschied zwischen ohmschen Entladungen und solchen mit zusätzlicher Heizung durch NI kann hier nicht erkannt werden.

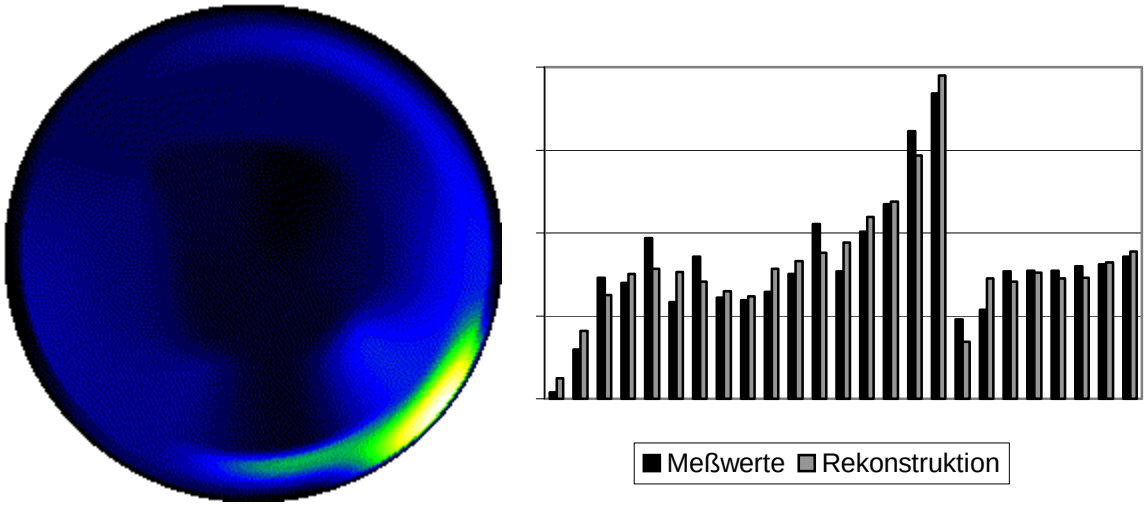

Abbildung 26: Rekonstruktion von ohmscher Entladung ohne Strahlungskühlung (Entladung 67200)

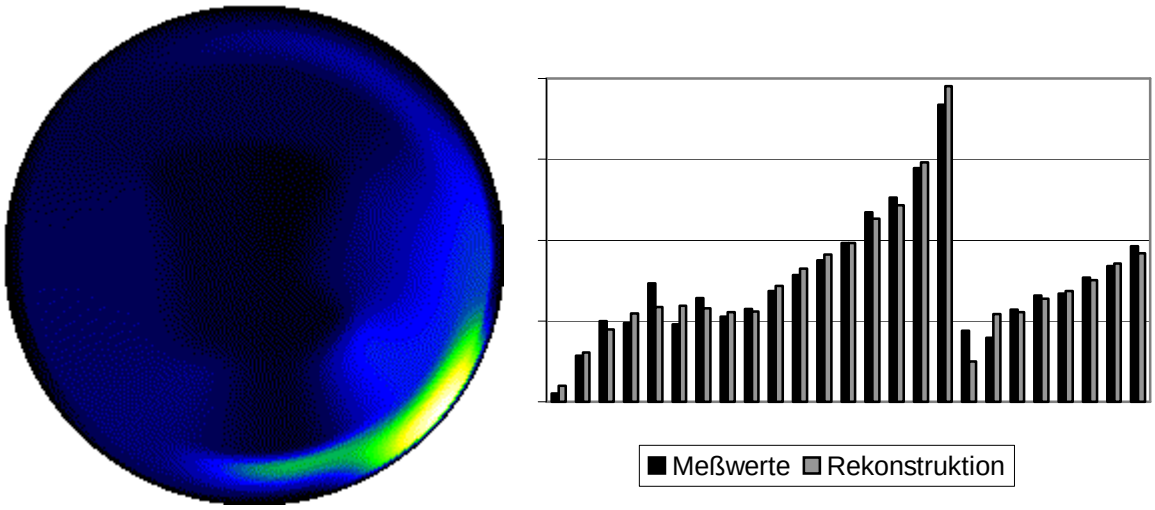

Abbildung 27: Rekonstruktion von NI–geheizter Entladung ohne Strahlungskühlung (Entladung 67233)

Ein Verfahren, um die thermische Belastung des Limiters zu reduzieren, ist die gezielte Zufuhr von leichten Verunreinigungen, die zur sogenannten Strahlungskühlung führt (vgl. Abschnitt 3.6). Bei den Entladungen, von denen die Meßwerte für die folgenden Rekonstruktionen stammen, wurden dazu während der Entladung geringe Mengen Neon in

das Plasma gegeben. Es wird erwartet, daß der strahlende Bereich dadurch aufgeweitet wird, die Abstrahlung aber weiterhin auf die Randschicht des Plasmas eingeschränkt bleibt.

Auch hier erfüllen die rekonstruierten Verteilungen recht gut die Erwartungen. Es ist deutlich zu erkennen, daß der strahlende Bereich gegenüber den Entladungen ohne Strahlungskühlung aufgeweitet ist.

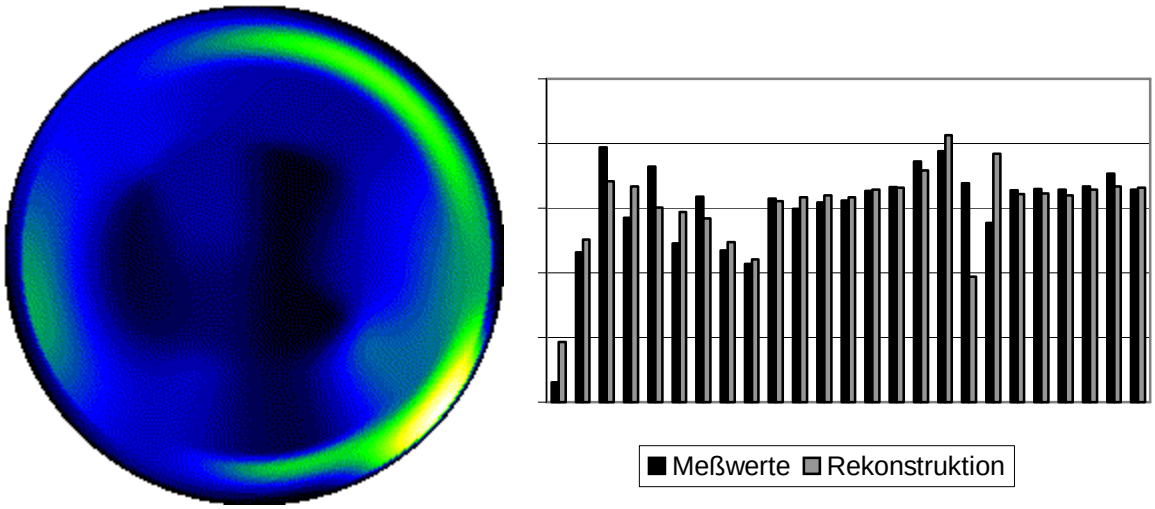

Abbildung 28: Rekonstruktion von ohmscher Entladung mit Strahlungskühlung (Entladung 67189)

Hier wird jedoch auch eine durch die geringe Anzahl der Sichtstrahlen und deren Anordnung bedingte prinzipielle Schwachstelle der Rekonstruktionen sichtbar: Am rechten Rand der rekonstruierten Verteilung ist etwa auf halber Höhe eine geringere Intensität als in den Bereichen darüber und darunter zu erkennen. Es gibt jedoch keinen Grund anzunehmen, daß hier ein solches lokales Minimum der Abstrahlung auftritt. Der Grund für dessen Auftreten ist vielmehr das Fehlen von Sichtstrahlen in senkrechter Richtung auf der rechten Seite, wodurch eine Lokalisierung der Abstrahlung in *x*–Richtung nahezu unmöglich wird. Bei den Rekonstruktionen ist am äußersten rechten Rand eine leichte Erhöhung der Abstrahlung zu erkennen. Wahrscheinlich handelt es sich hierbei um die auf der rechten Seite fehlende Intensität, die auf Grund der schlechten Lokalisierbarkeit entlang der waagerechten Sichtstrahlen verschoben wurde. Eine Abhilfe für dieses Problem ist wohl nur durch die Hinzunahme von senkrechten Sichtstrahlen auf der rechten Seite möglich.

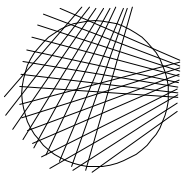

Abbildung 29: Lage der Sichtstrahlen

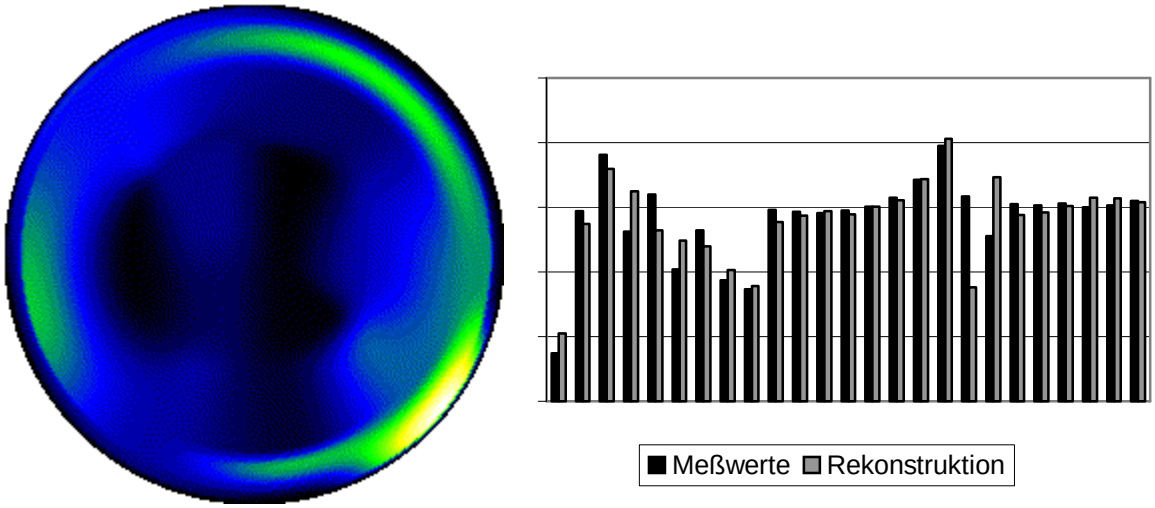

Abbildung 30: Rekonstruktion von NI–geheizter Entladung mit Strahlungskühlung (Entladung 67185)

Auch bei den Rekonstruktionen von Entladungen mit Strahlungskühlung kann kein nennenswerter Unterschied zwischen ohmschen Entladungen und solchen mit NI festgestellt werden.

Die Übereinstimmung der Projektionsdaten aus den Rekonstruktionen mit den Meßwerten ist bei diesen Entladungen ebenfalls recht gut, wenn auch größere Abweichungen als bei den Entladungen ohne Strahlungskühlung vorliegen.

Eine völlig andere Verteilung der Abstrahlung wird bei den sogenannten MARFEs (**M**ultifacettet **A**symmetric **R**adiation **F**rom the **E**dge) erwartet [28]. Hierbei handelt es sich um ein Phänomen, bei dem auf der Hochfeldseite eines Tokamaks (bei den Abbildungen in dieser Arbeit also auf der linken Seite) in einem Bereich von geringer radialer und poloidaler Ausdehnung eine starke Abstrahlung auftritt.

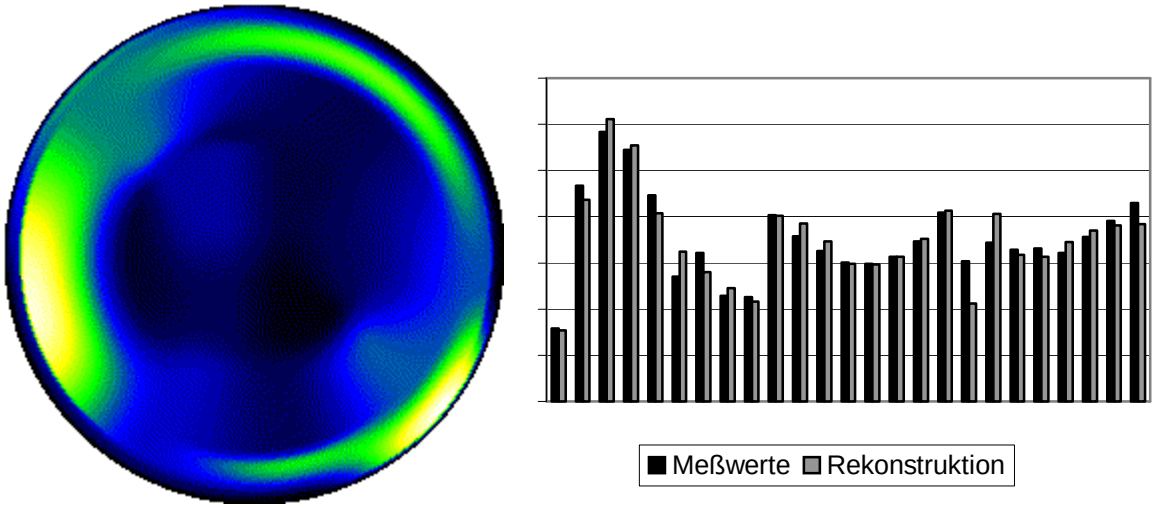

Abbildung 31: Rekonstruktion einer Entladung mit MARFE (Entladung 61083)

Auch in diesem Fall entspricht die Rekonstruktion sehr gut der erwarteten Verteilung. Hier zeigt sich auch der wesentliche Vorteil der hier vorgestellten Methode gegenüber dem bisher an TEXTOR benutzten Verfahren zur Rekonstruktion. Dieses ist auf eine Fourierkomponente in poloidaler Richtung beschränkt und kann somit Verteilungen mit mehreren Maxima an verschiedenen poloidalen Positionen nicht darstellen. Bei der hier errechneten Rekonstruktion sind jedoch deutlich die beim Auftreten von MARFEs erwarteten zwei Maxima zu erkennen.

Auch wenn die Übereinstimmung der berechneten Projektionsdaten mit den Meßwerten in diesem Fall wieder ausgezeichnet ist, so ist doch an einigen Stellen der Rekonstruktion zu erwarten, daß diese von der tatsächlichen Abstrahlungsverteilung abweicht. So ist es wie bei den Rekonstruktionen, die in Abbildung 30 und Abbildung 31 dargestellt sind, nicht zu erwarten, daß rechts oberhalb des Limiters ein lokales Minimum der Abstrahlung in poloidaler Richtung auftritt. Die hervorragende Übereinstimmung der berechneten Projektionsdaten mit den Meßwerten zeigt jedoch, daß dieser Fehler ohne zusätzliche Meßdaten wohl nicht zu umgehen ist.

Deutliche Schwächen des Verfahrens sind noch bei Entladungen zu erkennen, bei denen Verunreinigungen mit hoher Ordnungszahl in das Plasma gelangen. Diese dringen bis in den inneren Bereich des Plasmas vor bevor sie vollständig ionisiert werden. Daher ist in diesen Fällen mit einer signifikanten Abstrahlung aus dem Inneren des rekonstruierten Bereiches zu rechnen. Bei den Rekonstruktionen ist ein solches Verhalten zwar auch zu erkennen, jedoch weist die rekonstruierte Verteilung Charakteristika auf, die physikalisch nicht sinnvoll sind.

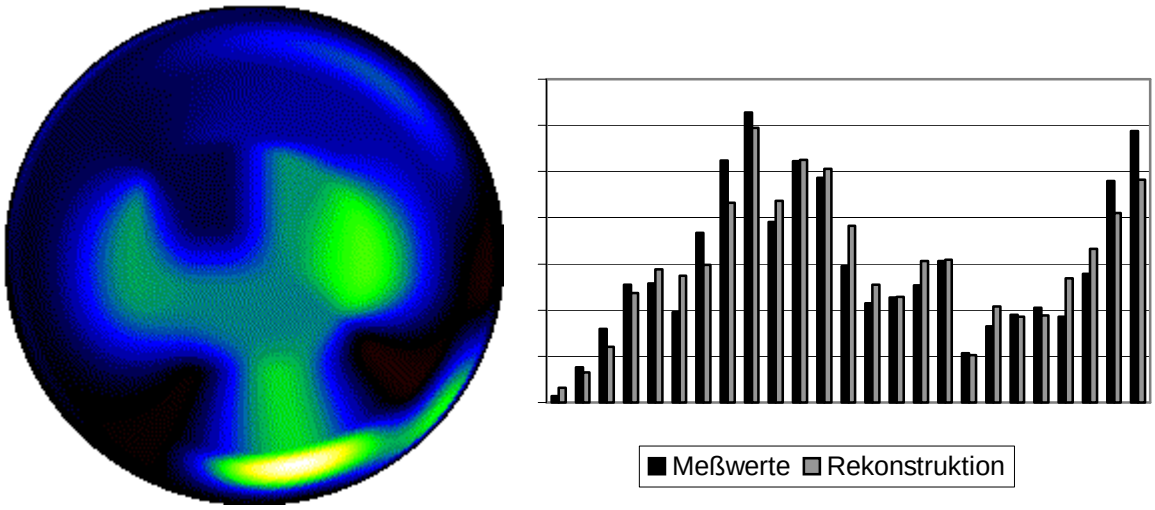

Abbildung 32: Rekonstruktion einer Entladung mit Abstrahlung aus dem Inneren (Entladung 58906)

So entspricht etwa die radial ausgedehnte Erhöhung in der Abstrahlung im unteren Bereich kaum den tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten. Auch ist die Übereinstimmung der berechneten Projektionsdaten mit den Meßwerten in diesem Fall weit schlechter als bei den anderen Rekonstruktionen. Es ist jedoch anzumerken, daß die Meßwerte dieser Entladung unter Umständen mit einem erheblichen Fehler belastet sind.

3.7 Eine Anwendung: Echtzeitregelung der Strahlungskühlung an TEXTOR

Wie im vorherigen Kapitel bereits erwähnt, ist in vielen Fällen die kontrollierte Zufuhr von leichten Verunreinigungen in Form von Gas in das Plasma sinnvoll, um durch Abstrahlung kontrolliert Leistung aus dem Plasma abzuführen [29]. Dabei ist es wünschenswert, das Verhältnis der abgestrahlten Leistung zu der dem Plasma zugeführten Leistung konstant zu halten. Zu diesem Zweck müssen diese beiden Größen während der Entladung in Echtzeit vorliegen. Was in diesem Zusammenhang unter „Echtzeit“ zu verstehen ist, wird an späterer Stelle erläutert.

3.7.1 Berechnung der zugeführten Leistung

Die Leistungszufuhr geschieht durch folgende Verfahren:

- **Ohmsche Heizung**. Diese ist durch das Prinzip des Tokamaks, bei dem das Plasma als Sekundärwicklung eines Transformators fungiert, in jedem Fall vorhanden. Die Leistung kann als Produkt von Plasmastrom und Ringspannung berechnet werden und liegt meistens bei etwa 400 kW. Es liegen Signale vor, die proportional zu Plasmastrom und Ringspannung sind.

- **Neutralteilcheninjektion** (NI oder NBI, *neutral beam injection*). Hierbei werden Wasserstoff- oder Deuteriumionen elektrostatisch beschleunigt und vor dem Eintritt in das Plasma neutralisiert. Die zugeführte Leistung läßt sich als Produkt von Beschleunigungsspannung, Ionenstrom und Transmissionsfaktor berechnen. An TEXTOR sind zwei NI–System installiert; für beide liegen Signale vor, die proportional zur Beschleunigungsspannung bzw. zum Ionenstrom sind. Der Transmissionsfaktor ergibt sich aus einem teilchenartabhängigen Polynom zweiten Grades in der Beschleunigungsspannung.

- **Mikrowellenheizung** (ICRH). Hier wird Leistung in Form von Mikrowellen über in dem TEXTOR–Gefäß installierte Antennen in das Plasma eingestrahlt. An TEXTOR sind zwei ICRH–Systeme installiert. Für beide liegen Signale vor, die direkt proportional zu der abgegebenen Leistung sind.

Jede dieser Größen läßt sich also in einfacher Weise aus den zur Verfügung stehenden Signalen berechnen. Somit liegen keine prinzipiellen Schwierigkeiten vor, die zugeführte Leistung in kurzer Zeit berechnet werden soll.

3.7.2 Berechnung der abgestrahlten Leistung

Anders verhält es sich mit der abgestrahlten Leistung: Diese muß aus den Meßdaten der Bolometrie berechnet werden. Da diese nur an einer toroidalen Position aufgenommen werden, muß dabei von einer toroidalen Symmetrie des Plasmas ausgegangen werden. Mit dem hier entwickelten Verfahren kann nun die Abstrahlungsverteilung an einer toroidalen Position berechnet werden und aus dieser unter der erwähnten Symmetrieannahme auch die insgesamt abgestrahlte Leistung.

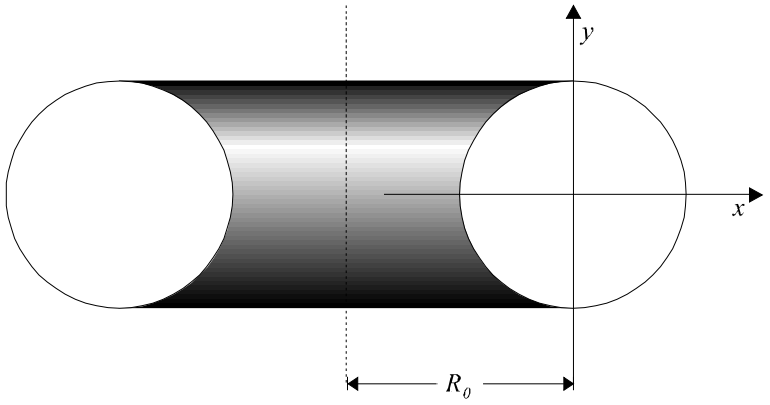

Abbildung 33: Schematischer Schnitt durch TEXTOR

Mit einer Abstrahlungsverteilung $P(x,y)$ an einer toroidalen Position errechnet sich die von dem Plasma insgesamt abgestrahlte Leistung P_{ges} in den Koordinaten von Abbildung 33 als

$$P_{\text{ges}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} 2\pi\left(x + R_0\right) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} P\left(x, y\right) dy\, dx$$

Wird nun mit dem hier entwickelten Verfahren eine Abstrahlungsverteilung P_{rek} mit Basisfunktionen $\mathbf{b} = \left(b_1, \ldots, b_{n_b}\right)$ aus Meßwerten **s** errechnet, so ist diese

$$P_{\text{rek}}\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{n_b} c_i \cdot b_i\left(x, y\right)$$

wobei sich die Koeffizienten **c** mit der Rekonstruktionsmatrix **R** als $\mathbf{c} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{R}$ errechnen. Mit dieser Rekonstruktion errechnet sich die Gesamtabstrahlung des Plasmas als

$$\begin{aligned} P_{\text{ges}} &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} 2\pi\left(x + R_0\right) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \sum_{i=1}^{n_b} c_i \cdot b_i\left(x, y\right) dy\, dx \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{n_b} c_i \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(x + R_0\right) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} b_i\left(x, y\right) dy\, dx \end{aligned}$$

oder mit

$$\mathbf{q} = \left(q_1, \ldots, q_{n_b}\right), \quad q_i := 2\pi \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(x + R_0\right) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} b_i(x, y) dy\, dx$$

in einfacher Form als

$$P_{ges} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q} =: \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}.$$

Dabei ist **v** nur durch die Wahl der Basisfunktionen und die Rekonstruktionsabbildung bestimmt und von der einzelnen Messung unabhängig. Wird zu einem Satz von Basisfunktionen mit zugehöriger Rekonstruktionsabbildung nun dieser Vektor **v** ausgerechnet, so reduziert sich die Berechnung der abgestrahlten Leistung auf ein einfaches Skalarprodukt und kann daher sehr schnell durchgeführt werden.

3.7.3 Realisierung der Regelung

Die Regelung des Gaseinlasses wurde mit Hilfe eines Computers durchgeführt, der alle notwendigen Signale aufnimmt und daraus den Quotienten von zugeführter zu abgestrahlter Leistung berechnet. Dieser Wert wird als Analogsignal an einen Regler weitergegeben und dort mit einem vorgegebenen Sollwert verglichen. Aus der Differenz dieser beiden Werte wird dann die Stellgröße für den schnellen Gaseinlaß ermittelt.

Die Signale des älteren Bolometrie–Systems, das an die Kamera oberhalb des TEXTOR–Gefäßes angeschlossen ist, stehen als frequenzmoduliertes TTL–Signal zur Verfügung und werden daher von TTL–Zählern aufgenommen. Alle anderen Signale stehen als Analogsignale zur Verfügung und werden mit AD–Wandlern aufgenommen.

Der Begriff *Echtzeit* wird hier dadurch bestimmt, daß der FM–Wandler, der die Signale der älteren Bolometrie–Kamera zur Verfügung stellt, mit einer Abtastfrequenz von 200 Hz arbeitet. Daher wurde die gesamte Regelung für eine Regelfrequenz von 200 Hz ausgelegt; für die Berechnung des Stellwertes stehen also maximal 5 ms zur Verfügung. Innerhalb dieser Zeit müssen:

- 24 AD–Wandler Kanäle und 9 TTL–Zähler ausgelesen werden
- diese Werte skaliert werden
- die eingestrahlte und die abgestrahlte Leistung berechnet werden
- der Quotient als Stellgröße auf einen DA–Wandler gegeben werden.

Da sowohl die verwendeten AD–Wandler als auch die Zähler nach einmaliger Initialisierung unabhängig von dem Rechner arbeiten, konnte der Zeitaufwand für die Verwaltung und das

Auslesen der jeweiligen Bausteine sehr gering gehalten werden. Es stellte sich heraus, das selbst auf einem nach heutigem Stand einfachem Personal Computer (Pentium/75 MHz) ohne Probleme alle notwendigen Schritte innerhalb der zur Verfügung stehenden 5 ms durchgeführt werden konnten.

Um eine synchrone Aufnahme aller Meßwerte zu gewährleisten, werden alle Zähler und AD–Wandler extern getaktet. Die beiden verwendeten AD–Wandler arbeiten jeweils mit einem Wandlerbaustein und gemultiplexten Eingängen. Da der Kanalversatz der AD–Wandler jedoch nur 10 µs beträgt, kann er hier vernachlässigt werden. Der 200 Hz Takt wird von einem quarzgesteuertem Taktgenerator erzeugt, der von dem TEXTOR Triggersignal gestartet wird.

Um eine eventuelle Verschiebung der Nullinie bei einzelnen Signalen zu korrigieren, wird bereits 500 ms vor dem eigentlichen Beginn einer Entladung die Aufnahme der Signale gestartet. Da alle Signale zu diesem Zeitpunkt exakt 0 sein sollten, wird der Mittelwert der bis zum Beginn der Entladung aufgenommenen Werte als Nullinie angenommen.

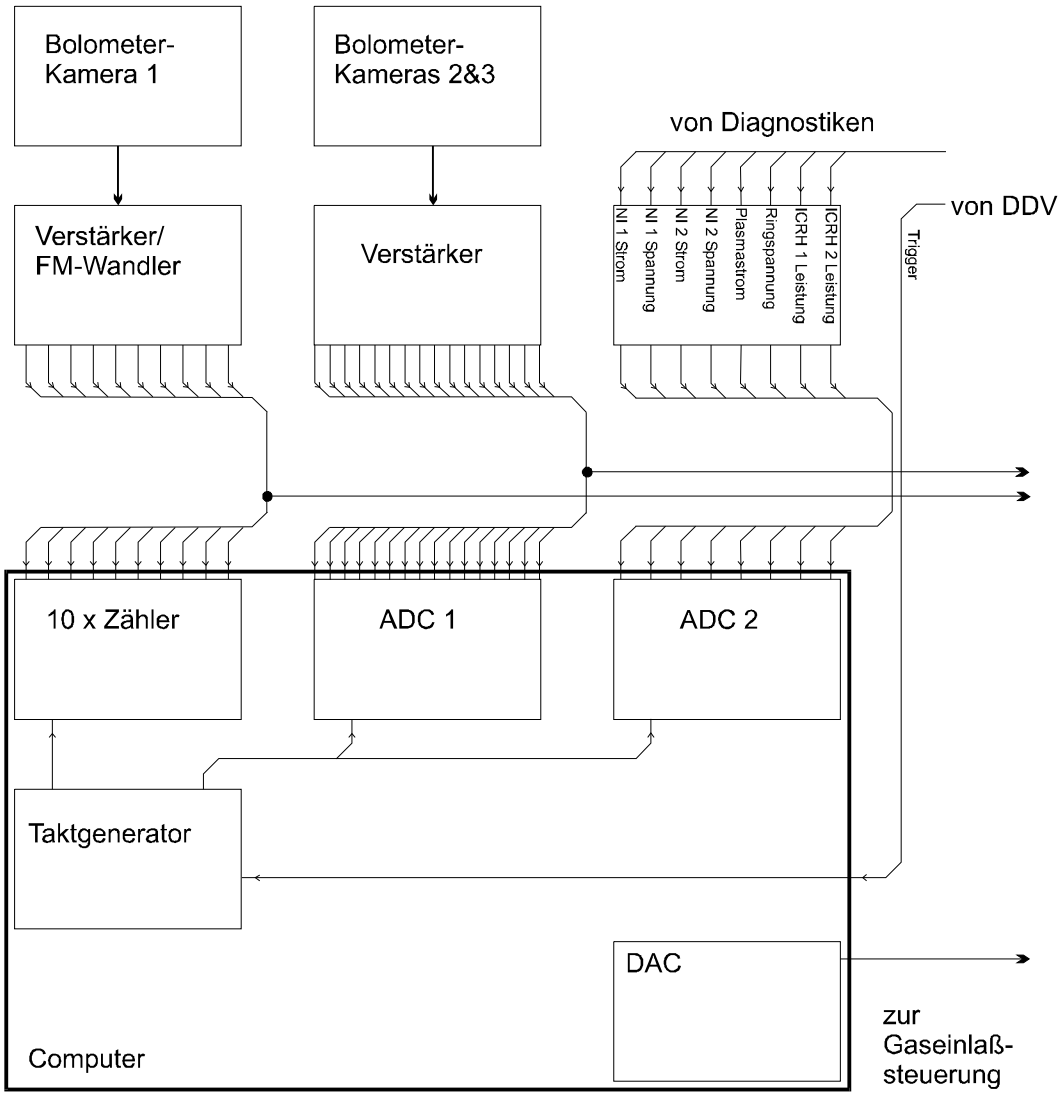

Abbildung 34: Aufbau der Regelung für den Gaseinlaß

3.7.4 Erste Ergebnisse der Regelung

Um die Funktion der Regelung für die Strahlungskühlung zu überprüfen, stand etwa ein Messtag an TEXTOR zur Verfügung. Dabei konnte die Funktion an ohmschen und NI–geheizten Entladungen getestet werden; die Mikrowellenheizung stand während dieser Meßzeit nicht zur Verfügung.

Zunächst wurde dabei die geregelte Strahlungskühlung nach einigen Sekunden Entladungsdauer zugeschaltet. Der Sollwert für den Regler wurde dabei auf Werte zwischen 0,7 und 0,95 eingestellt, es sollten also 70 – 95% der zugeführten Leistung abgestrahlt werden. Dabei zeigte es sich zunächst, daß das System zu Überschwingern in der Regelung tendierte. Durch sorgfältiges Einstellen des Reglers konnte dieser Effekt jedoch weitgehend

beseitigt werden. Auch erwies es sich als vorteilhaft, den Sollwert des Reglers nicht schlagartig auf 0,9 zu stellen, sondern in einer kurzen Rampe (etwa 0,5 s) auf diesen Wert hochzufahren. So konnte der eingestellte Sollwert in kurzer Zeit erreicht und für die vorgegebene Dauer sehr konstant gehalten werden.

Die folgenden Abbildungen zeigen den von dem hier vorgestelltem System während der Entladung errechneten Quotienten von abgestrahlter zu zugeführter Leistung. Dieser wird üblicherweise mit γ bezeichnet. Die beiden zugrundeliegenden Größen wurden ebenfalls gespeichert und mehrfach mit den entsprechenden Werten[viii] aus der bisherigen TEXTOR–Diagnostik verglichen. Dabei zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung der Werte.

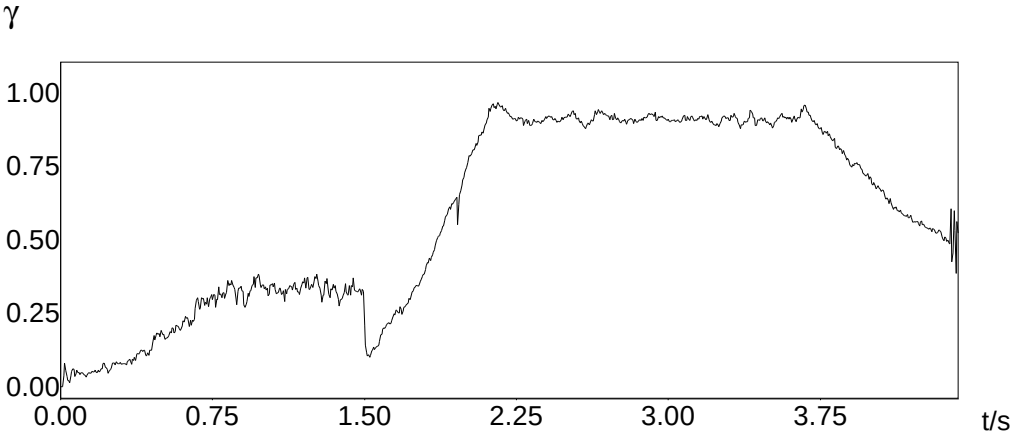

Abbildung 35: γ bei Entladung 67182

Anschließend wurde der Sollwert des Reglers so eingestellt, daß er nach Beginn der Entladung zunächst auf 0,625 stand und nach einigen Sekunden in einer kurzen Rampe auf 0,925 heraufgefahren wurde. Auch hierbei folgte der Quotient von abgestrahlter zu zugeführter Leistung sehr gut den vorgegebenen Werten.

[viii] Auch in der Vergangenheit wurde aus den Bolometrie–Signalen schon die abgestrahlte Leistung berechnet, jedoch mit einem Verfahren, das sich nicht für die Echtzeitanwendung eignete.

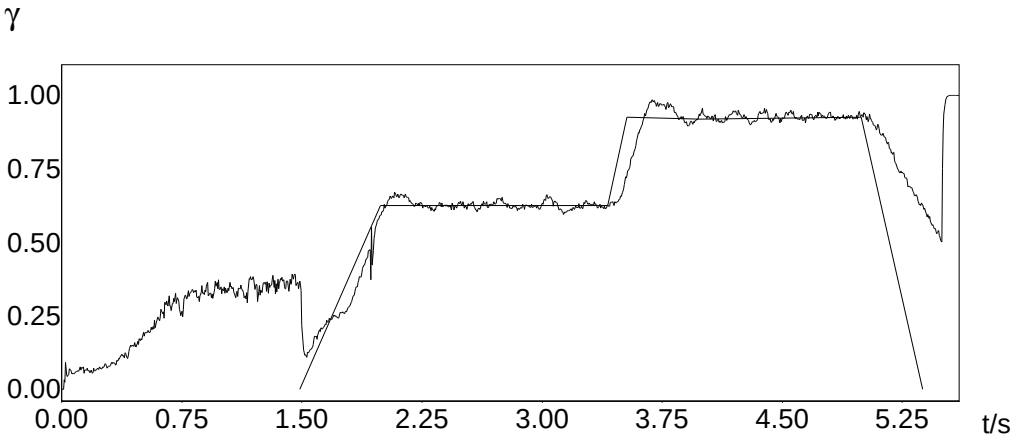

Abbildung 36: Entladung 67185; γ und vorgegebener Sollwert

Auch bei der anschließend vorgegebenen Stufe in umgekehrter Richtung, also mit einem Sollwert von zunächst 0,925 und später 0,625, zeigte sich ein sehr gutes Regelverhalten. Eine Abweichung des gemessenen Wertes für γ zu dem Sollwert wird nur in den Bereichen sichtbar, in denen der Sollwert sich schnell ändert. Dies ist bei den Anstiegen des Sollwerts vor allem durch die Trägheit der Bolometer-Sensoren bedingt. Hier scheint es sinnvoll, mit numerischen Methoden zu versuchen ein schnelleres Regelverhalten zu erreichen. Die Abweichung bei schnell sinkendem Sollwert ist dadurch bedingt, daß Gas, welches zur Kühlung eingelassen wurde, an diesen Stellen wieder abgepumpt werden muß, und somit für das Bestehende System nicht zu ändern.

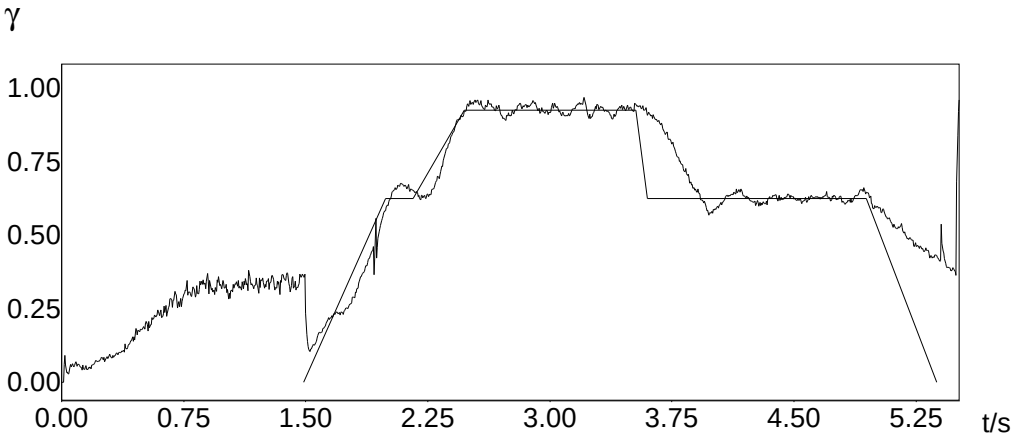

Abbildung 37: Entladung 67186: γ und vorgegebener Sollwert

4 Zusammenfassung und Ausblick

Parallelisierbare Verfahren, insbesondere neuronale Netze und verwandte Methoden, können an vielen Stellen, an denen konventionelle Verfahren der Datenverarbeitung nicht einsetzbar sind, noch Lösungen zur Verfügung stellen. Dabei kann sowohl die Rechengeschwindigkeit als auch die Fähigkeit, unbekannte Funktionen in meist numerisch recht stabiler Art zu approximieren, Vorteile gegenüber konventionellen Verfahren bieten. In vielen Fällen kann jedoch ein konventionelles Verfahren auch zu den gewünschten Ergebnissen führen ohne dabei die Nachteile der Neuronalen–Netz–Methoden aufzuweisen. Dabei muß die Geschwindigkeit der konventionellen Verfahren nicht unbedingt geringer sein. Die Nachteile der Neuronalen–Netz–Methoden sind insbesondere der hohe Aufwand für das Training, eine geringe Flexibilität bezüglich Veränderungen in der Form der Eingangsdaten (zum Beispiel eine veränderte Anzahl) sowie die Unmöglichkeit, den genauen Verlauf der dargestellten Funktion vorherzusagen.

Bei der Bestimmung der Ionentemperatur aus Ladungsaustauschspektren hat es sich gezeigt, daß hier konventionelle Verfahren in fast allen Punkten den Verfahren, welche mit einem neuronalen Netz arbeiten, gleichwertig oder überlegen sind. Lediglich die stets gleiche, kurze Rechenzeit bleibt ein Vorteil des neuronalen Netzes.

Ein hier entwickeltes Ad-hoc-Verfahren liefert bei etwa gleicher Rechenzeit wie das neuronale Netz Ergebnisse mit einer etwa gleich großen mittleren Abweichung von den Sollwerten. Es ist jedoch zu beachten, daß auch die Sollwerte hier mit einem Fehler behaftet sein können, da auch sie mit einem numerischen Verfahren – dem Anpassen von simulierten Spektren an die gemessenen – berechnet wurden; eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der tatsächlichen Ionentemperatur, also der Sollwerte besteht hier nicht.

Ein weiteres konventionelles Verfahren liefert bei einer etwa um eine Zehnerpotenz größeren Rechenzeit Temperaturwerte mit einer sehr viel geringeren Abweichung von den Sollwerten. Die Rechenzeit – mit den hier verwendeten Rechnern etwa 30 msek pro Spektrum – ist hierbei jedoch noch immer kürzer als die Meßdauer für ein Spektrum (etwa 50 msek). Bei diesem Verfahren werden Gaußkurven an die gemessenen Spektren angepaßt; aus deren Halbwertsbreite wird mit Hilfe einer vorher berechneten Tabelle die Ionentemperatur bestimmt.

Bei dem hier betrachteten Problem wird eine prinzipielle Schwierigkeit bei dem Einsatz von neuronalen Netzen für die Auswertung von Meßwerten deutlich: für den Einsatz eines neuronalen Netzes muß dieses zunächst trainiert werden. Dazu muß eine große Menge von bereits ausgewerteten Meßwerten vorliegen, die als Trainingsmuster dienen. Es muß also bereits ein Verfahren zur Auswertung der betrachteten Daten existieren. Das neuronale Netz kann dann im besten Fall dieses Verfahren imitieren.

Eine Ausnahme hiervon sind Fälle, bei denen durch ein neuronales Netz nicht bekannte Umkehrungen einer bekannten Funktion dargestellt werden sollen. Das Training kann in

diesem Fall so durchgeführt werden, daß die Hintereinanderausführung des Netzes und der bekannten Abbildung die Identität approximiert; Eingangs/Ausgangswertepaare sind hier für das Training nicht notwendig.

Nur in drei Fällen kann also durch den Einsatz eines neuronalen Netzes ein Vorteil entstehen:

- Wenn das existierende Verfahren nicht numerisch dargestellt werden kann;
- Wenn es nicht in der gewünschten Zeit durchgeführt werden kann;
- Wenn die Umkehrung einer bekannten Funktion gesucht wird.

Ein Beispiel für den ersten Fall ist hierbei die Erkennung von handschriftlichen Buchstaben: hierbei ist das vorhandene Verfahren zur Auswertung die Betrachtung durch einen Menschen. Dieses Verfahren kann mit großer Zuverlässigkeit in kurzer Zeit durchgeführt, jedoch bisher nicht numerisch dargestellt werden.

Nur in wenigen Fällen bietet es sich an, daß ein neuronales Netz auf Grund von geringerer Rechenzeit ein konventionelles Verfahren ersetzt. Da für das Training eines neuronalen Netzes im allgemeinen sehr viele (oft einige 1000) Trainingsdaten benötigt werden, darf auch das konventionelle Verfahren, welches zur Berechnung der Trainingsdaten verwendet wird, hierfür nicht allzu lange benötigen. Nur für die Fälle, bei denen diese Rechenzeit nicht mit Hilfe von schnelleren Geräten auf die erforderliche Größe reduziert werden kann, die Geschwindigkeit eines neuronalen Netzes jedoch ausreicht, ist dessen Einsatz vorteilhaft.

Der dritte Fall tritt im zweiten Teil dieser Arbeit, der tomographischen Rekonstruktion aus Bolometriedaten auf. Hierbei wird eine Umkehrfunktion der bekannten Meßabbildung gesucht. Mit dem Einsatz von Methoden, wie sie von neuronalen Netzen her bekannt sind, konnten hier Umkehrfunktionen berechnet werden, deren Ergebnisse im Wesentlichen den an dieser Stelle erwarteten entsprachen.

Die rekonstruierten Verteilungen wurden hier als Linearkombinationen von Basisfunktionen dargestellt. Diese Basisfunktionen wiederum wurden auf Grund von physikalischen Überlegungen ausgewählt. Die gesuchte Umkehrabbildung war dabei die Abbildung von den Meßwerten auf die Koeffizienten der Basisfunktionen. Da die Abbildung, zu der eine Umkehrabbildung gesucht wurde, linear ist, wurde diese ebenfalls als linear angenommen. Durch die Randbedingung, daß bei den rekonstruierten Verteilungen möglichst keine negativen Werte vorkommen sollen, konnten an dieser Stelle jedoch nicht die bekannten Verfahren zur Berechnung einer solchen Umkehrung eingesetzt werden. Daher wurde hier ein Gradientenabstiegsverfahren eingesetzt. Der minimierte Term war dabei eine Kombination aus der Abweichung der dargestellten Funktion von einer Umkehrabbildung und einem Term, der ein Maß für die Negativität der erzeugten Rekonstruktionen darstellte. Minimiert wurde nur auf solchen Punkten, die als Meßwerte tatsächlich vorkamen.

Als weiterer Schritt wurden bei diesem Verfahren dir verwendeten Basisfunktionen variiert. Mit einer Fehlerfunktion, die sich aus den beiden von dem Gradientenabstieg verbleibenden Fehlern sowie zwei weiteren Termen, die durch physikalische Überlegungen motiviert waren, wurde hierbei ein stochastischer Abstieg durchgeführt. Da dieses Verfahren extrem Rechenaufwendig ist, wurde es auf einer parallelen Rechnerarchitektur implementiert. Der dadurch erzielte Vorteil in der Rechenzeit skalierte in etwa mit der Anzahl der eingesetzten Prozessoren.

Mit der errechneten Rekonstruktionsfunktion kann unter Annahme einer toroidalen Symmetrie des Plasmas die insgesamt abgestrahlte Leistung berechnet werden. Da eine lineare Funktion angenommen wurde, kann dies mit sehr geringem Rechenaufwand geschehen. Dies wurde dazu verwendet, ein System für die Echtzeitregelung der Strahlungskühlung an TEXTOR aufzubauen. Bei den bisher durchgeführten Experimenten zur Funktion der Regelung zeigte sich, daß es mit diesem System möglich ist, vorgegebene Verhältnisse von zugeführter zu abgestrahlter Leistung zu erreichen und zu halten. Lediglich bei schnellen Änderungen des Sollwertes zeigte sich eine deutliche Trägheit des Regelsystems.

Eine deutliche Verbesserung der möglichen tomographischen Rekonstruktionen wird zu erwarten sein, wenn die geplante vierte Kamera für die Bolometrie an TEXTOR installiert wird. Diese soll in vertikaler Richtung auf die Niederfeldseite des Plasmas ausgerichtet sein. Da die dort angebrachten Limiter von entscheidender Bedeutung für die Abstrahlungsverteilungen sind, dieser Bereich bisher jedoch nur durch eine horizontale Kamera abgedeckt ist, stellt dies zur Zeit noch die größte prinzipielle Schwierigkeit für die Rekonstruktionen dar. Die geplanten zusätzliche Sensoren würden sich in das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte System ohne großen Aufwand einbinden lassen und mit Sicherheit zu verbesserten Rekonstruktionen führen.

Auch ohne weiter Sensoren sind noch Verbesserungen an dem hier vorgestellten System denkbar, die jedoch in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht mehr implementiert werden konnten. So sind insbesondere für die Modellierung des inneren Bereichs der Abstrahlungsverteilungen Modelle denkbar, die zu verbesserten Rekonstruktionen führen könnten. Eine der Möglichkeiten ist dabei ein Modell, welches den Shafranov-Shift explizit berücksichtigt. Dieser könnte als Parameter aus Meßwerten von TEXTOR errechnet werden. Ein solches Modell würde jedoch zu einem wesentlich komplizierteren Verfahren bei der Optimierung der Basisfunktionen führen. Da jedoch dieser Teil schon bei dem hier vorgestellten einfachen Modell mit Abstand den größten Anteil an der Rechenzeit benötigt, und die Implementation eines solchen Verfahrens sicherlich mit vielen Proberechnungen verbunden ist, muß für eine solche Verfeinerung des Verfahren mit einem großen Zeitaufwand gerechnet werden.

Anhang A: Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Schematische Darstellung von TEXTOR 4
Abbildung 2: Lage der Bolometer-Sensoren 6
Abbildung 3: Schematischer Aufbau der Meßeinrichtung 9
Abbildung 4: Simuliertes Spektrum [...] mm sowie angepaßte Gaußglocke 15
Abbildung 5: Gemessenes Spektrum und mit Gradientenabstieg angepaßte Gaußkurve 18
Abbildung 6: Gemessenes Spektrum und angepaßtes simuliertes Spektrum 19
Abbildung 7: Gemessenes Spektrum und mit ad–hoc Verfahren angepaßte Gaußkurve 21
Abbildung 8: Mehrlagiges Perzeptron 23
Abbildung 9: Ergebnisse beim Anpassen von Gaußfunktionen. Korrelationskoeffizient: 0,999 30
Abbildung 10: Ergebnisse des Ad–hoc–Verfahrens. Korrelationskoeffizient: 0,983 30
Abbildung 11: Ergebnisse des neuronalen Netzes. Korrelationskoeffizient: 0,973 31
Abbildung 12: Errechnete Temperaturen vs. Rauschanteil 32
Abbildung 13: Errechnete Temperaturen vs. Rauschanteil 33
Abbildung 14: Schematische Darstellung eines Bolometer-Sensors 36
Abbildung 15: Lage der Detektoren 37
Abbildung 16: Prinzip der Radontransformation 38
Abbildung 17: Schematische Darstellung der Meßanordnung 39
Abbildung 18: Schematische Darstellung der Flußflächen mit Shafranov–Shift Δs. 44
Abbildung 19: Stützpunkt und Träger der Basisfunktion b_{ij}^{1} 46
Abbildung 20: Beispiel einer Basisfunktion b_{ij}^{1} und Überlagerung mehrerer Basisfunktionen 46
Abbildung 21: Stützpunkt und Träger der Basisfunktion $b^{2}_{(-1)1}$ 47
Abbildung 22: Beispiel einer Basisfunktion b_{ab}^{2} 48
Abbildung 23: Eine mögliche Verteilung von 25 Basisfunktionen 50
Abbildung 24: Abschätzung des Gewinns an Rechengeschwindigkeit durch Parallelisierung. 56
Abbildung 25: Farbskala für die Rekonstruktionsabbildungen 58
Abbildung 26: Rekonstruktion von ohmscher Entladung ohne Strahlungskühlung (Entladung 67200) 59
Abbildung 27: Rekonstruktion von NI–geheizter Entladung ohne Strahlungskühlung (Entladung 67233) . 59
Abbildung 28: Rekonstruktion von ohmscher Entladung mit Strahlungskühlung (Entladung 67189) 60
Abbildung 29: Lage der Sichtstrahlen 60
Abbildung 30: Rekonstruktion von NI–geheizter Entladung mit Strahlungskühlung (Entladung 67185) ... 61
Abbildung 31: Rekonstruktion einer Entladung mit MARFE (Entladung 61083) 61
Abbildung 32: Rekonstruktion einer Entladung mit Abstrahlung aus dem Inneren (Entladung 58906) 62
Abbildung 33: Schematischer Schnitt durch TEXTOR 64
Abbildung 34: Aufbau der Regelung für den Gaseinlaß 67
Abbildung 35: γ bei Entladung 67182 68
Abbildung 36: γ bei Entladung 67185 69
Abbildung 37: γ bei Entladung 67186 69

Anhang B: Literaturverzeichnis

1 Hey, J.D., Transactions of Fusion Technology 25, 315–325 (1994)

2 Hey, J.D., Lie, Y.T., Rusbült, D., Wienbeck, J., Korten, M, Hintz, E., in Laboratory and Astronomical High resulution Spectra (Eds. A.J. Sauval, R. Blomme and N. Grevesse), Astron. Soc. Pacific Conf. Ser. 81 (1995), 250–251

3 von Hellermann, M.G., Summers, H.P.: *Active Beam Spectroscopy at Jet,* Atomic and Plasma–Material Interaction Processes in Controlled Thermonuclear Fusion, Janev, R.K. and Drawin, H.W. (Eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 1993

4 Fonck, R.J., Darrow, D.S. Jaehnig, K. P., Physical Review A, Vol 29, No 6, 1984

5 Bishop, C.M., Roach, C.M., von Hellerman, M.: Automatic Analysis of JET Charge Exchange Spectra using Neural Networks, JET–P(92)90

6 Bishop, C.M., Roach, C.M.: *Fast curve fitting using neural networks*, Rev. Sci. Intrum. 63 (19), October 1992

7 Schorn, R.P., Hintz, E., Rusbült, D., Aumayr, F., Schneider, M., Unterreiter, E., Winter, H.: Appl. Phys. B 52, 71–78 (1991)

8 Hey, J.D., Lie, Y.T., Rusbült, D., Hintz, E.: *Doppler Broadening and Magnetic Field Effects on Some Ion Impurity Spectra Emitted in the Boundary Layer of a Tokamak Plasma*, Contrib. Plasma Phys. 34 (1994) 6, 725–747

9 Schorn, R.P., Wolfrum, E., Aumayr, F., Hintz, E., Rusbült, D., Winter, H. in Nuclear Fusion, 11/91

10 Hey, J.D., Chu, C.C., Krumm, H.P., Michaelis, M.M.: *Calculation of Zeeman–Broadened Line Profiles for Applications on TEXTOR (II)*, Technical Report T2/1996, Physics Department University of Natal, Durban/South Africa, 1996

11 Bethe, H.: *Quantenmechanik der Ein– und Zwei–Elektronenprobleme* in *Handbuch der Physik*, Geiger und Scheel (Hrsg), Verlag Julius Springer, Berlin 1931

12 Condon, E.U., Shortley, G.: *Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, 1935

13 Brink, D.M., Satchler, G.R.: *Angular Momentum* Clarendon Press, Oxford 1965

14 Hey, J.D., Chu, C.C., Krumm, H.P. and Michaelis, M.M.: *Calculation of Zeeman–Broadened Line Profiles for Applications on TEXTOR (III)*, Technical Report T3/1996, Physics Department University of Natal, Durban/South Africa, 1996

15 Baker, D.R., Groebner, R.J., Burell, K.H.: *A neural network for the analysis of DIII–D charge exchange recombination data*, General Atomics Project 3466, August 1993

16 Minsky, M., Papert, S.: *Perceptrons*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988

17 Cichocki, A., Unbehauen, R.: *Neural networks for optimization and signal processing*, Wiley, West Sussex, 1993

18 Rumelhart, D.E., McClelland, J.L. (Eds.): *Parallel Distributed Processing*, The M.I.T. Press, Cambridge/MA, 1986

19 Jacobs, R.A.: *Increased Rates of Convergence Through Learning Rate Adaption*, Neural Networks, Vol. 1, pp 295–307, 1988

20 Rumelhart, D.E., Hinton, G.E. Williams, R.J., *Learning internal representations by error propagation*, in Anderson, J.A., Rosenfeld, E. (Eds): Neurocomputing: Foundation of Research, Kap 42, pp 675–695, MIT Press, 1988

21 Fahlman, S.E.: *An empirical study of learning speed in back–propagation networks*, in Touretzky, D., Moody, J.E.,Hinton, G., Sejnowski, T. (Eds.): Proc. Of the 1988 Connectionist Models Summer School, June 17–26, 1988, Carnegie Mellon Univ., Morgan Kaufmann, 1988

22 Zell, A., Korn, T., Mache, N., Sommer, T.: *SNNS Benutzerhandbuch*, Universität Stuttgart, Fakultät Informatik, Bericht 1/91

23 Rapp,J: *Ortsaufgelöste Messung der Strahlungsleistung des TEXTOR–Plasmas in einem poloidalen Querschnitt*, Jül–3172, Jülich, 1996

24 Ochando, M.A.: Bolometry. In *Diagnostics for Contemporary Fusion Experiments*, 1991

25 Scott, P.E. Bolometry. In *Diagnostics for fusion reaktor conditions*, 1982

26 Müller, E.R. *Design study of bolometric scan diagnostics for JET*. Technical Report IPP III/56, Max–Planck–Institut für Plasmaphysik, Garching, 1980

27 Feneberg, W. *Neoclassical impurity transport in the presence of toroidal and poloidal rotation*. Nuclear Fusion, 29: 1117–1124, 1989

28 Lipschultz, B.:*Review of MARFE phenomena in tokamaks* J. Nucl. Mater., 145–147: 15–25, 1987

29 Unterberg, Bernhard: *Strahlungskühlung durch Verunreinigung in der Plasmarandschicht des Tokamaks TEXTOR – vergleichende Untesuchungen zur Injektion von Neon und Silizium.* Jül–3036, Jülich, 1995